

6 基本統計量

基本統計量とは、データの分布の特徴を記述したり要約したりするために必要な指標です。データ表から、**(偏差)平方和 S** や**不偏分散 V** 、**標準偏差 s** の計算ができるようにしておきましょう。

図表 1.5 母集団とサンプルの関係

	母集団(母数)	サンプル(統計量)
平均	母平均 μ	平均値 $\bar{x}$
ばらつき		(偏差)平方和 S^*
	母分散 σ^{2*}	不偏分散 V
	母標準偏差 σ	標準偏差 s

理解しておきたい基本統計量

基本統計量	概要
平均値 $\bar{x}$	個々のデータ $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$ を全部足して合計を求め、その合計をデータの個数で割ったもの。 ● $\sum_{i=1}^n x_i$ について、$\sum$ の上下にある n と $i=1$ は省略して表記されることがある(以下同) $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 〈例〉ある部品の長さ(単位: mm)について、5個のデータ {3.0, 3.2, 3.3, 3.3, 3.7} の平均値 $\bar{x}$ は、 $\bar{x} = \frac{3.0+3.2+3.3+3.3+3.7}{5} = \frac{16.5}{5} = 3.3$
中央値(メディアン) $\tilde{x}$	データを昇順(大きさの順)に並べた際に、中央に位置する値。データの数が偶数の場合は、中央の2つの値の平均値をとる。 - 測定値が奇数個ある場合……中央に位置する値 〈例〉{4, 5, 6, 7, 8} の中央値は、$\tilde{x} = 6$ - 測定値が偶数個ある場合……中央の2つの値の平均値 〈例〉{5, 6, 7, 8} の中央値は、$\tilde{x} = \frac{6+7}{2} = 6.5$
最頻値(モード)	データの中で、最も多く現れる値。

*ちなみに、平方和 S をデータの個数 $n-1$ で割った値を分散 (s^2) という。基本統計量として「不偏分散」やその平方根である「不偏標準偏差」が多く用いられるのは、理論上の値より実測値(データ)の方が小さくなる傾向があり、それを補正するため。当然、データの個数 n が大きくなればなるほど、理論上の値と実測値の差は小さくなっていく

範囲 R	データの最大値と最小値の差 ($R = \text{Range}$)。
偏差	個々のデータから平均値を引いた値。 $x_n - \bar{x}$
(偏差)平方和 S	偏差(個々のデータから平均値を引いた値)を2乗し、これらを合計した値。 $S = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2 \sum x_i \cdot \bar{x} + \sum \bar{x}^2$ $= \sum x_i^2 - 2 \bar{x} \sum x_i + \bar{x}^2 \sum 1$ $= \sum x_i^2 - 2 \frac{\sum x_i}{n} \cdot \sum x_i + n \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2$ $= \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$ 〈例〉{2, 3, 4, 5, 6} の平方和 S は、 $S = (4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{(2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2}{5}$ $= 90 - \frac{20 \times 20}{5} = 90 - 80 = 10$
不偏分散 V^*	(偏差)平方和を自由度 ϕ (サンプルサイズ $n-1$) で割った値。母分散の推定値として用いられる。 $V = \frac{S}{\phi} = \frac{S}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}$ 〈例〉平方和 $S = 15$、観測個数6個のときの不偏分散 V は、 $V = \frac{15}{6-1} = \frac{15}{5} = 3$
(不偏)標準偏差 s	不偏分散の平方根(分散の値の次元をデータと同じ次元に落とした値)。 $s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{S}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}}$ 〈例〉不偏分散 $V = 9$ のときの標準偏差 s は、$s = \sqrt{9} = 3$
変動係数 CV	標準偏差を平均値で割った値。 $CV = s / \bar{x}$ 〈例〉標準偏差 $s = 0.6$、平均値 $\bar{x} = 3.0$ のときの変動係数 CV は、$CV = \frac{0.6}{3.0} = 0.2$
四分位数	データを大きさの順に並べたとき、4等分する位置の値。4等分すると、仕切りが3つできることになる。1番目の仕切りに位置する値のことを第1四分位数、2番目の仕切りに位置する値のことを第2四分位数(中央値)、3番目の仕切りに位置する値のことを第3四分位数という。  データの数が偶数の場合は、中央値と同様に、中央の2つの値の平均値をとる。

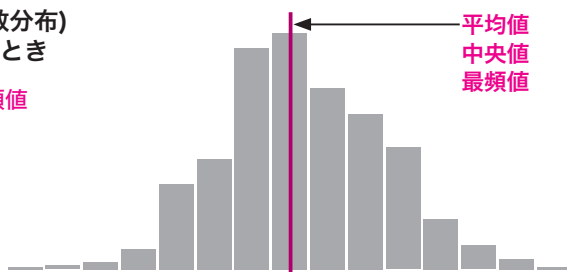
※(不偏)分散と平均平方は同義であるが、過去問の出題実績に則り、第1章(データの取り方とまとめ方)では「(不偏)分散」と表記し、第5章(単回帰分析)においては「平均平方」と表記する

基本統計量において、**平均値**、**中央値(メディアン)**、**最頻値(モード)**の関係にはいくつかのパターンがあります。出題されたこともありますので、理解しておきましょう。

図表 1.6 左右対称なヒストグラム

①ヒストグラム(度数分布)がほぼ左右対称なとき

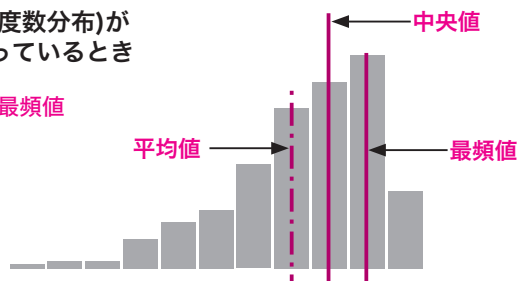
平均値 $\approx$ 中央値 $\approx$ 最頻値



図表 1.7 右に偏ったヒストグラム

②ヒストグラム(度数分布)が右のほうに偏っているとき

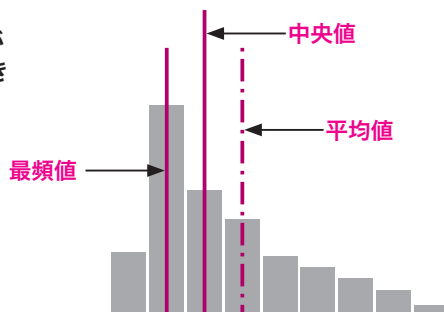
平均値 $<$ 中央値 $<$ 最頻値



図表 1.8 左に偏ったヒストグラム

③ヒストグラム(度数分布)が左のほうに偏っているとき

平均値 $>$ 中央値 $>$ 最頻値



赤シートで正解を隠して設問に答えてください(解説はP.20)。

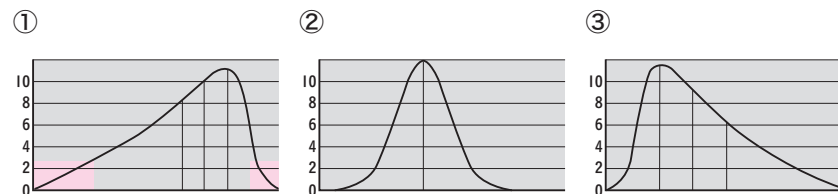
練習問題

【問1】 下記のデータにおいて、平均値、中央値、最頻値、範囲、平方和、分散、標準偏差、変動係数および第3四分位数を求めよ。

{2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8}

正解 平均値**5** 中央値**4.5** 最頻値**4** 範囲**6** 平方和**34**
分散**3.78** 標準偏差**1.94** 変動係数**0.39** 第3四分位数**7**

【問2】 下記の3つのデータ分布グラフにおいて、平均値、中央値、最頻値の関係を正しく表した式を選べ。



- ア. 平均値 $=$ 中央値 $=$ 最頻値
イ. 最頻値 $<$ 中央値 $<$ 平均値
ウ. 平均値 $<$ 中央値 $<$ 最頻値

正解 ① **ウ** ② **ア** ③ **イ**

【問3】 下記の(1)~(3)に入る語句を答えよ。

- 母集団のサンプリング単位が何らかの順序で並んでいる際に、一定間隔でサンプリング単位を取るサンプリングを(1)という。
- 母集団をいくつかの部分母集団に分割して、各部分母集団から1つ以上のサンプリング単位を取るサンプリングを(2)という。
- 必要な数のサンプリング単位が母集団から一度に取られるサンプリング又は母集団に戻すことなく繰り返し取られるサンプリングを(3)という。

正解 (1) **系統サンプリング** (2) **層別サンプリング**
(3) **非復元サンプリング**

赤シートで正解を隠して設問に答えてください(解説はP.33から)。

練習問題

【問1】 以下のA群にある新QC七つ道具において、それぞれ該当する説明(B群)を挙げよ。

〈A群〉

- ア. 系統図法
- イ. アローダイアグラム法
- ウ. 親和図法

〈B群〉

- ア. 言語データを、イメージの類似性の観点でまとめていく。
- イ. 進行上の順序関係を明確にして、その順序に沿った工程計画を作成する。
- ウ. ゴールを明確に設定し、そこに至る手段・方策を系統づけて展開する。

正解 (A群)ア⇔(B群)ウ (A群)イ⇔(B群)イ (A群)ウ⇔(B群)ア

【問2】 下記の(1)～(5)に当てはまる語句を選択肢から選べ。

- ①連関図とは、原因と(1)、目的と(2)などが複雑に絡み合った問題の関係を、論理的につなぐことによって問題解明を図るものである。
- ②PDPC法とは、(3)を実施するうえで、トラブル防止やさまざまな結果の予測を行うことで、(4)をできるだけ望ましい方向に導くものである。
- ③(5)法とは、行と列に属する要素により構成された二元表の交点に着目して、その二元的関係の中から問題解決への着想を得るものである。

〈選択肢〉

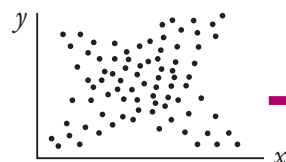
- ア. 計画 イ. 目標 ウ. 課題 エ. 分析 オ. 手段 カ. 結果
- キ. プロセス ク. マトリックス・データ解析
- ケ. マトリックス図 コ. パレート図

正解 (1)カ (2)オ (3)ア (4)キ (5)ケ

層別

散布図を用いた層別

全体
(相関関係は不明)



作業で層別

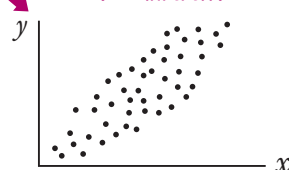
作業A

(負の相関関係)



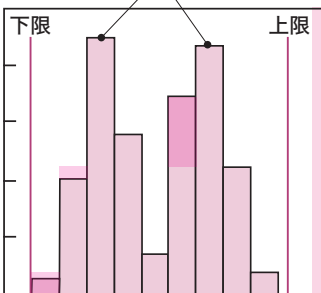
作業B

(正の相関関係)



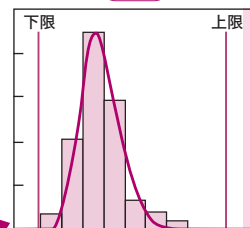
ヒストグラムを用いた層別

ヒストグラムは山が2つ

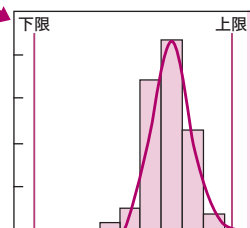


工場別に層別

工場A



工場B



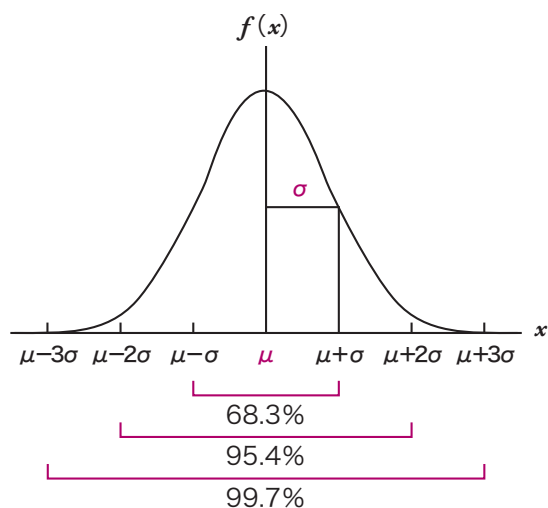
正規分布は、横軸に確率変数、縦軸に確率密度をとる、母平均 $=\mu$ 、母分散 $=\sigma^2$ によって定まる分布で、 $N(\mu, \sigma^2)$ と表します。正規分布で、変数 x が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、その**期待値**と**分散**はそれぞれ、

- 期待値 $E(x) = \mu$
- 分散 $V(x) = \sigma^2$

となります。

また、正規分布においては、

- 平均 $\pm 1 \times$ 標準偏差 σ の範囲に全体の約68.3%が含まれ、
 - 平均 $\pm 2 \times$ 標準偏差 σ の範囲に全体の約95.4%が含まれ、
 - 平均 $\pm 3 \times$ 標準偏差 σ の範囲に全体の約99.7%が含まれる
- ということがわかっています(下図参照)。



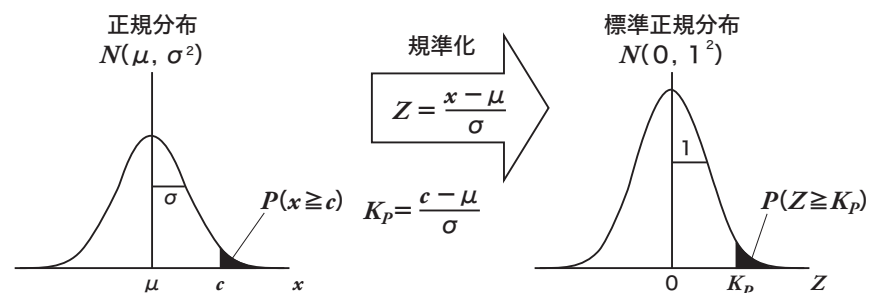
※期待値は、1回の試行で得られると期待される数値の平均値。

例：サイコロの目の平均値、宝くじの賞金の平均額

なお、

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\text{平均との差}}{\text{標準偏差}}$$

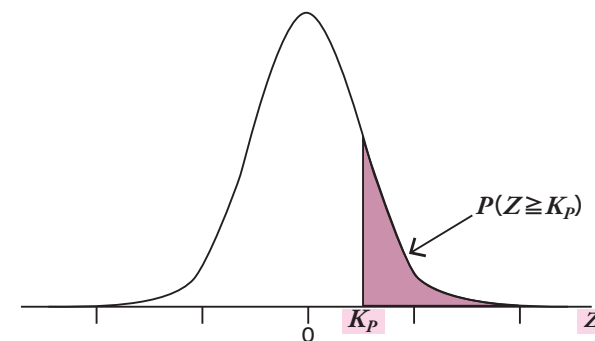
とすると、確率変数 Z は、期待値 $E(Z)$ (平均値) $=0$ 、分散 $V(Z)=1^2$ の正規分布に従うことになります。このような正規分布 $N(0, 1^2)$ を**標準正規分布**といい、この変換を**規準化**または**標準化**といいます。



正規分布表の見方

あるデータが正規分布に従うと仮定できる場合、このデータを標準化することとで「**標準正規分布表**」を用いて確率を求めることができます。

例を挙げると、以下の標準正規分布図において、表の値は(全体面積を1とした)着色部分の面積を表します。これは、「標準正規分布に従う Z がとる値が x 以上となる確率 $P(Z \geq K_p)$ 」を意味します。



〈例〉サイコロを6回振って1の目が x 回出るときの確率は二項分布に従う。そこで $x=4$ の場合、 $P(4)$ の確率は次のように求めることができる。

1の目が出る確率は、 $\frac{1}{6}$ 。1の目が出ない確率は、 $\frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ 。

$$\begin{aligned} P(4) &= {}_6C_4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} \times \frac{1^4}{6^4} \times \frac{5^2}{6^2} \\ &= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{1}{1296} \times \frac{25}{36} \approx 0.008 = 0.8\% \end{aligned}$$

4 ポアソン分布

ポアソン分布とは、ある時間間隔で発生する事象の回数を表す離散確率分布です。

非負整数値(0, 1, 2, ...)をとる離散的な確率変数を x とし、単位時間当たりの事象の平均発生回数を λ とし、事象が発生する回数を k とすると、

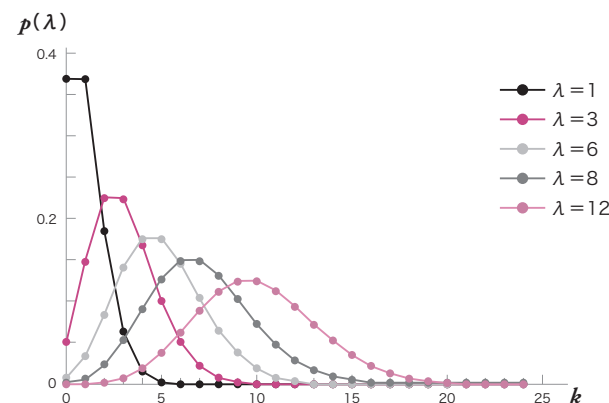
$$P(x=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad ※ e: \text{自然対数の底 (2.718...)}$$

と表され、確率変数 x は母数 λ の**ポアソン分布**に従うといいます。

ポアソン分布は、二項分布 $B(n, p)$ において、 np を一定の値 λ とし、この λ を一定に保った状態で、 n を十分に大きくして、 p を十分に小さくした場合(調査数 n が相当に多い中、不良品率 p は極めて小さい場合)の確率分布であり、確率の極めて小さい事象が、多数回の試行の結果生じるものととらえることができ、**まれな現象の確率分布**ともいわれます。

なお、 $\lambda \geq 5$ であれば、ポアソン分布を実用上、正規分布として扱ってよいとされています。図表3.3を見ると、 $\lambda = 6, 8, 12$ のグラフが正規分布(左右対称の形)になっていることがわかります。

図表3.3 ポアソン分布のグラフの一例



〈例〉ある板1枚当たりのへこみの数が一定の単位中に現れる欠点数の確率がポアソン分布に従うとき、へこみの平均箇所数が4か所である場合に、へこみが1か所もない確率と、へこみが1か所ある確率を求める(ただし、 $e^{-4} = 0.0183$ とする)。

- へこみが1か所もない確率は、 $\lambda = 4$ 、 $k = 0$ の場合。

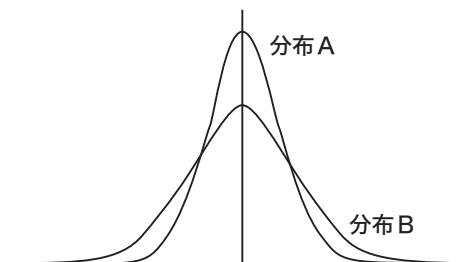
$$P(0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = e^{-4} = 0.0183$$

- へこみが1か所ある確率は、 $\lambda = 4$ 、 $k = 1$ の場合。

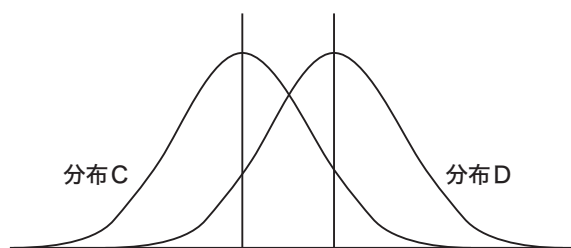
$$P(1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 4 \times e^{-4} = 0.0732$$

5 期待値、分散、共分散の基本性質(公式)

期待値(Expected value)とは、確率変数を取る値を、確率によって重み付けした**平均値**のことです。一方、分散(Variance)とは、確率変数のばらつき具合を表し、確率変数と期待値の差を2乗したものに、確率で重みをつけた重み付き**算術平均**となります。



上図において、分布Aと分布Bを比較すると、分布Aと分布Bの期待値(=平均値)は同じですが、分布Aの分散(=ばらつき)は分布Bの分散に比べて小さいといえます。



上図において、分布Cと分布Dを比較すると、分布Cと分布Dの分散(=ばらつき)は同じですが、分布Cの期待値(=平均値)は分布Dの期待値に比べて小さいといえます。

なお、**共分散**(Covariance)とは、2つの確率変数の関連性を測る尺度として用いられ、大きさが同じ2つのデータの間での、平均からの偏差の積の平均値を表します。

$$\begin{aligned} \bullet \text{Cov}(X, Y) &= E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

	離散型確率変数	連続型確率変数
期待値 E	$E(X) = \sum_i X_i f(X_i)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X) dx$
分散 V	$V(X) = E\{(X - E(X))^2\}$	

※共分散の期待値 E と分散 V の計算式は上記の通り

期待値 E 、分散 V 、共分散 Cov には、それぞれ以下の基本性質(公式)があります(X, Y は確率変数、 a, b は定数を表す)。

〈期待値 E 〉

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(X + a) = E(X) + a$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$
- $E(aX + Y + b) = aE(X) + E(Y) + b$

※ X と Y が無相関(互いに独立)の場合、

$$\bullet E(XY) = E(X)E(Y)$$

〈分散 V 〉

- $V(a) = 0$
 - $V(aX) = a^2 V(X)$
 - $V(X + a) = V(X)$
 - $V(X + aY) = V(X) + a^2 V(Y)$
 - $V(aX + Y + b) = a^2 V(X) + V(Y)$
 - $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$
 - $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)$
- } X と Y が互いに独立ではない場合

〈共分散 Cov 〉

$$\bullet \text{Cov}(X, Y) = E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

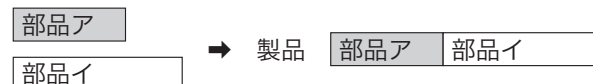
※ X と Y が無相関(互いに独立)の場合、 X と Y を合わせたものの分散は、 X の分散と Y の分散を足した値になる

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

→ 分散の加法性と呼ぶ。

〈例〉部品Aの長さは母平均6cm、母標準偏差0.4cmであり、部品イの長さは母平均9cm、母標準偏差0.6cmである。部品Aと部品イを横につなげて製品をつくるとき、その製品の長さの母平均と母標準偏差を求める。

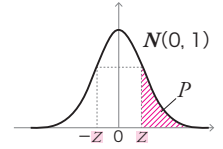
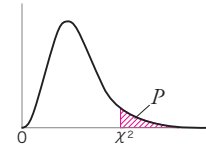
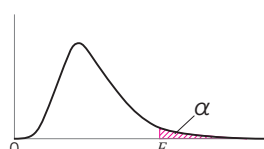
- 母平均 $= E(\text{ア}) + E(\text{イ}) = 6 + 9 = 15\text{cm}$
- 母標準偏差 $= \sqrt{\text{母分散}} = \sqrt{\sigma(\text{ア})^2 + \sigma(\text{イ})^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.6^2} = \sqrt{0.52} \approx 0.72\text{cm}$



6 統計量の分布

正規分布をする母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ について、仮説検定を行う際に用いる主な統計量の分布には、**標準正規分布**、 **t 分布**、 **χ^2 分布**、 **F 分布**があり、下の図表のとおり、使い分けます。

図表 3.4 仮説検定に用いる主な統計量の分布

	平均に関する検定	ばらつき(分散)に関する検定
母分散が 既知の場合	標準正規分布 (Z 分布) 	χ^2 分布 
母分散が 未知の場合	t 分布 	F 分布 

※図中の P 、 α は棄却域(有意水準)を示す

1) 標準正規分布 (Z 分布)

母平均 μ 、母分散 σ^2 の母集団から大きさ n のサンプル(標本)をランダムに抽出したとき、 n 個のサンプルの平均値 $\bar{x}$ の平均値(期待値) $E(\bar{x})$ と分散 $V(\bar{x})$ は、

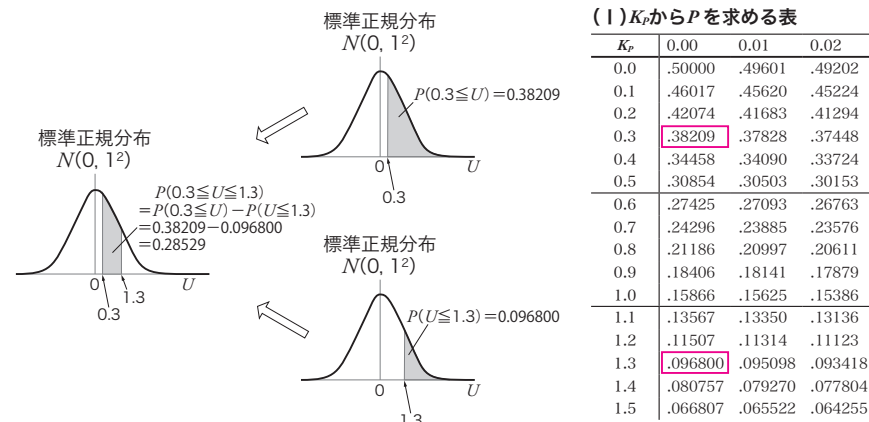
- $E(\bar{x}) = \mu$
- $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

となります。

また、 $Z = (\bar{x} - \mu) / \sqrt{(\sigma^2/n)}$ と規準化すると、 Z は $N(0, 1^2)$ の標準正規分布に従います。この Z を **検定統計量** といいます。

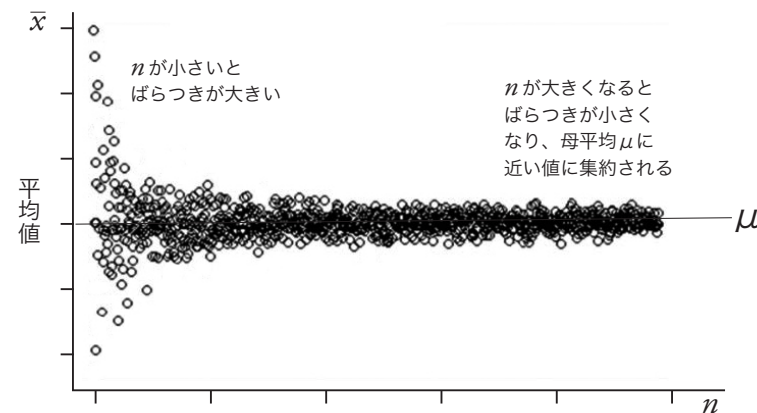
※実際の試験でも、分数の表記は例えば σ^2/n と $\frac{\sigma^2}{n}$ が混在しているので要注意。

この n が十分に大きいと、以下の①大数の法則および②中心極限定理が成立します。例えば、標準正規分布 $N(0, 1^2)$ において、0.3以上1.3以下となる確率を求めると、0.28529となります(下の図表参照)。



①大数の法則

標本平均 $\bar{x}$ は、母平均 μ に近い値をとります。



②中心極限定理

母集団の分布がどんな分布であっても、標本の大きさを大きくしたときは**近似的に正規分布に従う**というものです。母集団の従う確率分布に関係なく、標本平均は期待値 μ 、分散 σ^2/n の正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従うとみなせます。

2) t 分布

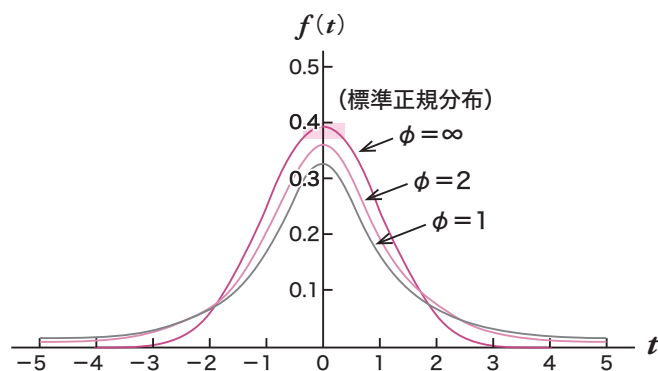
t 分布は標準正規分布とよく似た形の分布で、パラメータである**自由度 ϕ** によって分布の形が変わるという特徴を持っており、自由度 ϕ が大きくなるにつれて、標準正規分布に近づきます(下図参照)。

母分散が未知の値であり、 $n=20$ 個程度のデータしか集められない場合に、母平均の値を推定したいときに利用される確率分布です。標準正規分布における検定統計量の式 $Z = (\bar{x} - \mu) / \sqrt{(\sigma^2 / n)}$ において、 σ^2 の代わりに点推定量 $\hat{\sigma}^2 = V$ を代入します($\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の推定量)。

$N(\mu, \hat{\sigma}^2 / n)$ から n 個のサンプルをとり、次式で与えられる**検定統計量 t** は、**自由度 $\phi = n - 1$** の t 分布となります。

検定統計量 $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{V/n}}$ 、自由度 ϕ の t 分布の**両側確率 α** の点を $t(\phi, P)$

で表します。巻末の付表 2 (t 表) を用いて、例えば $\phi = 5$ 、 $P = 0.05$ の場合、 $t(5, 0.05) = 2.571$ を読み取ることができます。

図表 3.5 自由度 ϕ の t 分布

〈例〉母平均 $\mu = 3.0$ の正規母集団から大きさ $n = 7$ 個のサンプルをとり、次の値を得た(母分散は未知とする)。サンプルの平均値は $\bar{x} = 3.3$ 、不偏分散は $V = 0.3$ である。このときの検定統計量 t_0 は、

$$t_0 = \frac{3.3 - 3.0}{\sqrt{\frac{0.3}{7}}} \approx 1.45 \quad \text{となる。}$$

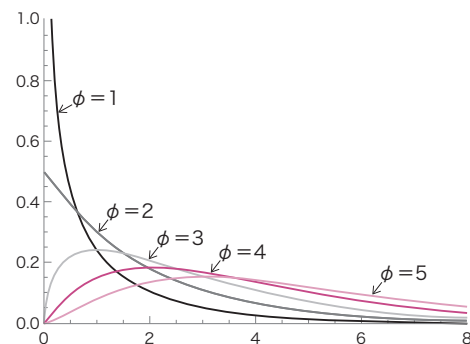
3) χ^2 分布(カイの2乗分布)

χ^2 分布は、**ばらつき(母分散 σ^2)**に関する検定と推定に用います。

χ^2 は、平方和 S を**母分散 σ^2** で割ったものであり、 $N(\mu, \sigma^2)$ から n 個のサンプルをとり、その平方和 S を σ^2 で割ったものは自由度 $\phi = n - 1$ の χ^2 分布となります。

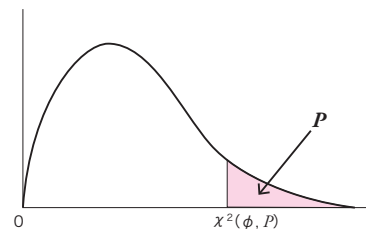
$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2}$$

χ^2 分布は**自由度 ϕ** によって定まります。自由度 ϕ の χ^2 の**上側確率 α** の点を $\chi^2(\phi, P)$ で表します。巻末の付表 3 (χ^2 表) を用いて、例えば、 $\phi = 5$ 、 $P = 0.05$ の場合、 $\chi^2(5, 0.05) = 11.0705$ を読み取ることができます。

図表 3.6 χ^2 分布の確率密度関数

※上側確率・下側確率

ある確率分布において、確率変数が「ある値」以上になる確率を上側確率といい、「ある値」以下になる確率を下側確率という

図表 3.7 自由度 ϕ の χ^2 分布

赤シートで正解を隠して設問に答えてください(解説はP.52から)。

練習問題

【問1】以下のA群にある3つの確率分布において、それぞれ該当する説明(B群)を挙げよ。

〈A群〉

ア 正規分布

イ 二項分布

ウ ポアソン分布

〈B群〉

ア 計数値データにおいて、ベルヌーイ試行を複数回行って、成功する回数が従う確率分布を表す。

イ 平均値と分散によって定まる分布で、調査対象数を増やしていくと、左右対称の釣鐘型の分布となる。

ウ 計数値データにおいて、まれに起こる現象の出現度数分布である。

正解 (A群)ア⇔(B群)イ (A群)イ⇔(B群)ア (A群)ウ⇔(B群)ウ

【問2】下記の(a)、(b)に入る語句を答えよ。

$N(50, 2^2)$ の正規分布に従っている、薬品の入ったボトルの容量(単位: mL)を生産している工場において、100,000本のボトルを生産した。

容量が48mL未満となるボトルの数は□(a)となる。

また、48mL以上かつ53mL未満の範囲にあるボトルを適合品とする場合、不適合品となるボトルの数は□(b)となる。

正解 (a) 15,866 本 (b) 22,547 本

【問3】下記の(a)、(b)に入る語句を答えよ。

母不適合品率5%の工程で、10個のサンプルを採取したとき、 $P=0.05$ 、 $n=10$ のときの二項分布(次ページのグラフ)に従うとすると、不適合品が含まれない確率は□(a)%で、不適合品が3個以下となる確率は□(b)%である。

〈例〉母標準偏差 $\sigma=0.5$ の正規母集団から大きさ $n=6$ 個のサンプルをとり、次の値を得た。サンプルの平均値 $\bar{x}=3.5$ 、平方和 $S=2.5$ である。このときの統計値 χ_0^2 は、

$$\chi_0^2 = \frac{2.5}{0.5^2} = 10.0 \quad \text{となる。}$$

4) F分布

分散が等しい2つの正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 、 $N(\mu_2, \sigma^2)$ からそれぞれランダムに取られた n_1 、 n_2 のサンプルから得られた不偏分散をそれぞれ V_1 、 V_2 とすると、 $F = V_1/V_2$ は、自由度 $\phi_1 = n_1 - 1$ 、 $\phi_2 = n_2 - 1$ のF分布に従います。

自由度 ϕ_1 、 ϕ_2 のF分布の上側確率 α の点を、 $F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$ で表すと、F分布の下側確率 $1 - \alpha$ の点は、 $F(\phi_2, \phi_1; \alpha)$ と表され、次式から求められます。

$$F(\phi_1, \phi_2; 1 - \alpha) = \frac{1}{F(\phi_2, \phi_1; \alpha)}$$

F分布は、分散分析や、正規分布に従う2つの母集団について「標準偏差が等しい」という仮説の検定などに用います。

〈例〉ある正規母集団から大きさ $n=8$ 個のサンプルをとったところ、不偏分散 $V_1=0.50$ であった。さらに10個のサンプルをとったところ、 $V_2=0.40$ であった。このときのF検定統計値 F_0 は、

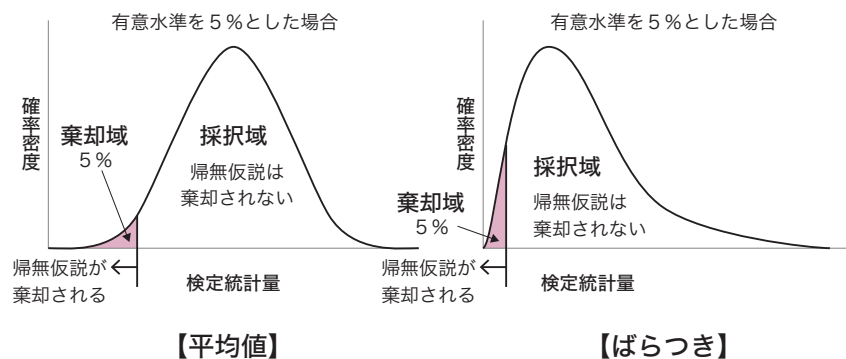
$$F_0 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{0.50}{0.40} = 1.25 \quad \text{となる。}$$

なお、 F_0 を求めるときは、 F_0 は1より大きくなるように、 V_1 と V_2 のうち大きい方を分子とする必要がある。

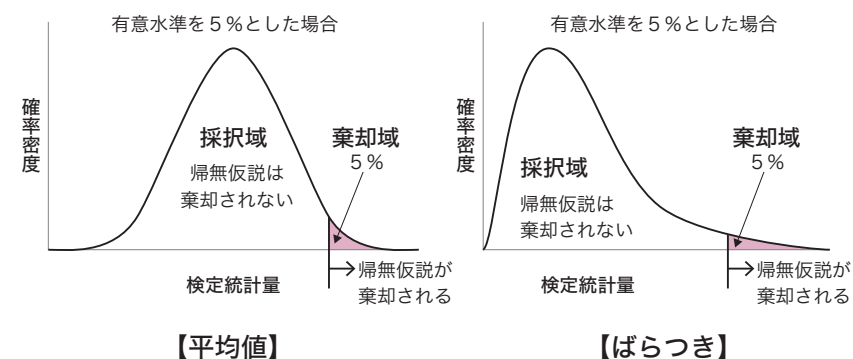
図表 4.3 検定と推定の種類

扱うデータ	検定と推定の種類	統計量計算に用いる指標	検定統計量の計算式	検定に用いる分布
計量値	1つの母平均 (母分散が未知の場合)	データの 平均値 $\bar{x}$ 分散 V	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$	t 分布
	1つの母平均 (母分散が既知の場合)	データの 平均値 $\bar{x}$ 母分散 σ^2	$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$	標準正規分布
	1つの母分散	母分散 σ^2 平方和 S	$\chi^2_0 = \frac{S}{\sigma_0^2}$	χ^2 分布
	2つの母平均 の差 (母分散が既知 の場合)	データの 平均値 $\bar{x}$ 母分散 σ^2	$Z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	標準正規分布
	2つの母平均 の差 (母分散が未知 で、母分散が 等しいと考え られる場合)	データの 平均値 $\bar{x}$ 分散 V	$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{V \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$	t 分布
	2つの母平均 の差 (母分散が未知 で、母分散が 等しいかどうか わからない場合)	データの 平均値 $\bar{x}$ 分散 V	$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{V_1}{n_1} + \frac{V_2}{n_2}}}$	t 分布 (ウェルチ の t 検定)

	2つの母分散 の比	分散 V	$F_0 = \frac{V_1}{V_2} (V_1 \geq V_2 \text{ の場合})$ $F_0 = \frac{V_2}{V_1} (V_1 < V_2 \text{ の場合})$	F 分布
	データに対応 がある場合	母平均の差 の平均値 $\bar{d}$ 分散 V_d	$t_0 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{V_d}{n}}}$	t 分布 母平均の 差の平均 値と分散 による計 算
計数値	母不適合品率	不適合品率 $p = \frac{x}{n}$	$u_0 = \frac{x - nP_0}{\sqrt{nP_0(1 - P_0)}}$	二項分布
	2つの母不適合 品率の違い	不適合品率 $p = \frac{x}{n}$	$u_0 = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{P(1 - P) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$	
	母不適合数 (母欠点数)	不適合数 c (欠点数)	$u_0 = \frac{\bar{c} - m_0}{\sqrt{\frac{m_0}{n}}}$	ポアソン 分布 ($m \geq 5$ で正規分 布に近似 できる)
	2つの母不適合 数(母欠点数)の 違い	不適合数 c (欠点数)	$u_0 = \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{\bar{c} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$	
	複数の母集団 での不適合品 率の比較等	不適合品率	期待度数 $t_{ij} = T_i \times T_j / T_{..}$ T_i : 分割表の列の合計値、 T_j : 分割表の行の合計値、 $T_{..}$: 分割表の合計値	分割表



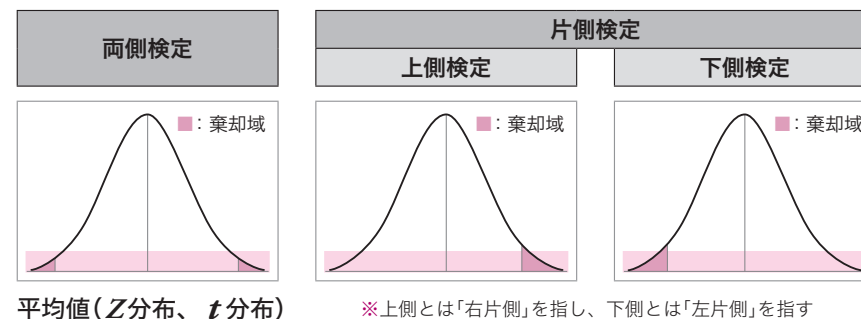
片側検定(左片側検定)において、**棄却域は左片側のみ**となることに留意しましょう。例えば、有意水準5%の場合、棄却域は5%となります(上の図参照)。



なお、片側検定(右片側検定)において、**棄却域は右片側のみ**となります。例えば、有意水準5%の場合、棄却域は5%となります(上の図参照)。

上記の説明のまとめとして、図表4.4(平均値)および図表4.5(ばらつき)を示します。

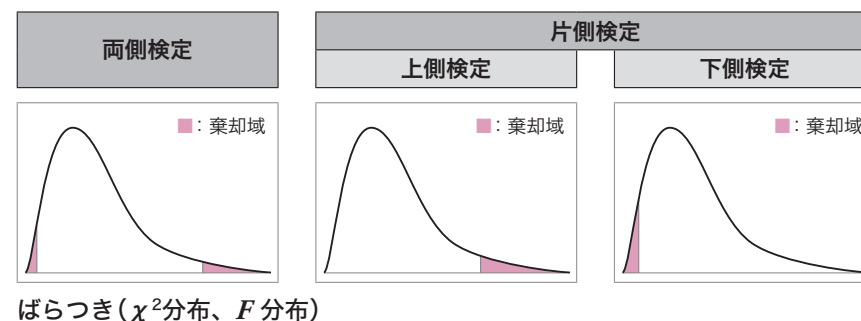
図表4.4 平均値の両側検定・片側検定における棄却域



平均値(Z 分布、 t 分布)

帰無仮説 H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$
対立仮説 H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$

図表4.5 ばらつきの両側検定・片側検定における棄却域



ばらつき(χ^2 分布、 F 分布)

帰無仮説 H_0	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$
対立仮説 H_1	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$

なお、統計的な判断を行う際、サンプリングしたデータの情報を知ることはできますが、**母集団そのものの情報**を知ることはできないため、**ある程度の誤りを避けることはできません**。

① σ^2 が未知の場合

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$
- 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)、
 $\mu > \mu_0$ (右片側検定)、 $\mu < \mu_0$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量の計算

データの平均値 $\bar{x}$ および分散 V により、 t_0 を求める。

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: \mu \neq \mu_0$ の場合、 $|t_0| \geq t(\phi, \alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \mu > \mu_0$ の場合、 $t_0 \geq t(\phi, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \mu < \mu_0$ の場合、 $t_0 \leq -t(\phi, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

※ $|t_0|$ は t_0 の絶対値

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\hat{\mu} = \bar{x}$
- 区間推定 : $\bar{x} - t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V}{n}}$

〈例〉平均値が大きくなったか否かの検定(母集団の分散が未知の場合)

母平均 : $\mu_0 = 9.0$ の母集団からデータ数 : $n = 10$ のサンプルをとった結果、標本平均値 : $\bar{x} = 10.0$ 、不偏分散 : $V = 0.4$ であった。このとき、平均値が大きくなったかどうかの検定の手順は以下のとおりである。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$
- 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (右片側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする

手順3 統計量の計算

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}} = \frac{10.0 - 9.0}{\sqrt{\frac{0.4}{10}}} = \frac{1.0}{\sqrt{0.04}} = 5.0$$

手順4 検定

$\mu > \mu_0 \rightarrow$ 右片側検定

t 表より、 $\alpha = 0.05$ 、 $\phi = n - 1 = 10 - 1 = 9$ の棄却限界値 t を求めると、 $t(\phi, 2\alpha) = t(9, 0.10) = 1.833$ となる。※ t 表は両側検定の表となっているため、片側検定の場合は α の値を2倍にする。

$t_0 = 5.0 > t = 1.833$ となることから、**有意となる**。帰無仮説は棄却され、対立仮説が成立する。

(参考) t 表(一部抜粋)

$\phi \backslash P$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228

手順5 推定

- 点推定： $\hat{\mu} = \bar{x} = 10.0$

- 区間推定： $\bar{x} - t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V}{n}}$

$$\begin{aligned} \text{(上限)} \quad \mu_U &= \bar{x} + t(9, 0.05) \sqrt{\frac{V}{n}} = 10.0 + 2.262 \sqrt{\frac{0.4}{10}} \\ &= 10.0 + 0.4524 = 10.4524 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(下限)} \quad \mu_L &= \bar{x} - t(9, 0.05) \sqrt{\frac{V}{n}} = 10.0 - 2.262 \sqrt{\frac{0.4}{10}} \\ &= 10.0 - 0.4524 = 9.5476 \end{aligned}$$

よって、 $9.5476 \leq \mu \leq 10.4524$

② σ^2 が既知の場合(手順2までは①と同じ)**手順1 仮説の設定**

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$
- 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)、
 $\mu > \mu_0$ (右片側検定)、 $\mu < \mu_0$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量の計算

データの平均値 $\bar{x}$ および母分散 σ^2 により、 Z_0 を求める。

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: \mu \neq \mu_0$ の場合、 $|Z_0| \geq Z(\alpha/2)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \mu > \mu_0$ の場合、 $Z_0 \geq Z(\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \mu < \mu_0$ の場合、 $Z_0 < -Z(\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定： $\hat{\mu} = \bar{x}$

- 区間推定： $\bar{x} - Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

〈例1〉平均値が変わったか否かの検定(母集団の分散が既知の場合)

母平均： $\mu_0 = 9.0$ 、母分散： $\sigma^2 = 1.0$ の母集団からデータ数： $n = 10$ のサンプルをとった結果、標本平均値： $\bar{x} = 10.0$ であった。ばらつきは変化していないものとする。このとき、平均値が変化したかどうかの検定の手順は以下のとおりである。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$
- 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ (両側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量の計算

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{10.0 - 9.0}{\sqrt{\frac{1.0}{10}}} = 3.16$$

手順4 検定

$\mu \neq \mu_0 \rightarrow$ 両側検定 正規分布表(P.71 参照)より、 $P=0.025 \rightarrow K_p = 1.960$ となる。 $\alpha = P$ 、 $Z(\alpha/2) = K_p$

$Z_0 > K_p$ となることから、有意となる(平均値が変化した)。

帰無仮説は棄却され、対立仮説が成立する。

手順5 推定

●点推定： $\hat{\mu} = \bar{x} = 10.0$

●区間推定： $\bar{x} - Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

(上限) $\mu_U = \bar{x} + Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10.0 + 1.960 \sqrt{\frac{1.0}{10}} \doteq 10.0 + 0.62 = 10.62$

(下限) $\mu_L = \bar{x} - Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10.0 - 1.960 \sqrt{\frac{1.0}{10}} \doteq 10.0 - 0.62 = 9.38$

よって、 $9.38 \leq \mu \leq 10.62$

〈例2〉平均値が大きくなったか否かの検定(母集団の分散が既知の場合)

母平均： $\mu_0 = 9.0$ 、母分散： $\sigma^2 = 1.0$ の母集団からデータ数： $n = 10$ のサンプルをとった結果、標本平均値： $\bar{x} = 10.0$ であった。ばらつきは変化していないものとする。このとき、平均値が大きくなったかどうかの検定の手順は以下のとおりである。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$
- 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ (右片側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量の計算

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{10.0 - 9.0}{\sqrt{\frac{1.0}{10}}} \doteq 3.16$$

手順4 検定

$\mu > \mu_0 \rightarrow$ 片側検定 正規分布表より、 $P=0.05 \rightarrow K_p = 1.645$ となる。

$\alpha = P$ 、 $Z(\alpha) = K_p$

(参考) 正規分布表(一部抜粋)

(II) P から K_p を求める表

P	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400
K_p	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.524	0.253

$Z_0 > K_p$ となることから、有意となる(平均値が大きくなった)。

帰無仮説は棄却され、対立仮説が成立する。

手順5 推定

●点推定： $\hat{\mu} = \bar{x} = 10.0$

●区間推定： $\bar{x} - Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

(上限) $\mu_U = \bar{x} + Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10.0 + 1.645 \sqrt{\frac{1.0}{10}} \doteq 10.0 + 0.52 = 10.52$

(下限) $\mu_L = \bar{x} - Z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10.0 - 1.645 \sqrt{\frac{1.0}{10}} \doteq 10.0 - 0.52 = 9.48$

よって、 $9.48 \leq \mu \leq 10.52$

計量値データに基づく検定と推定

2) 1つの母分散に関する検定と推定

1つの母分散に関する検定と推定は(正規分布に従う際)、 $\chi^2 = S / \sigma^2$ が、自由度 $\phi (= n - 1)$ の χ^2 分布に従うことを活用して、母分散に関する情報を多く持っている平方和 S および分散 V を用いて行います。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
- 対立仮説 $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (両側検定)、
 $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (右片側検定)、 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha=0.05$ とする。

手順3 統計量の計算

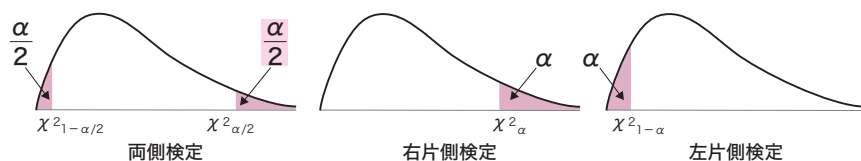
平方和 S を用いて、 χ_0^2 を求める。

$$\chi_0^2 = \frac{S}{\sigma_0^2}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ の場合、 $\chi_0^2 \geq \chi^2(n-1, \alpha/2)$ または $\chi_0^2 \leq \chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$ であれば有意となり(両側検定)、 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ の場合、 $\chi_0^2 \geq \chi^2(n-1, \alpha)$ であれば有意となり(右片側検定)、 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ の場合、 $\chi_0^2 \leq \chi^2(n-1, 1-\alpha)$ であれば有意となり(左片側検定)、 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

**手順5 推定(点推定、区間推定)**

- 点推定 : $\hat{\sigma}^2 = V = \frac{S}{n-1}$ ($\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の推定値)
- 区間推定 : $\chi^2 = S/\sigma^2$ は、自由度 $\phi (= n-1)$ の χ^2 分布に従うので、
 $\Pr\{\chi^2(n-1, 1-\alpha/2) < S/\sigma^2 < \chi^2(n-1, \alpha/2)\}$
 $\Pr\{S/\chi^2(n-1, \alpha/2) < \sigma^2 < S/\chi^2(n-1, 1-\alpha/2)\}$
 となることから、
 (上限) $\sigma_U^2 = S/\chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$
 (下限) $\sigma_L^2 = S/\chi^2(n-1, \alpha/2)$

〈例〉母分散が大きくなったか否かの検定

ある工程の管理特性は、平均値 $\mu=10.00$ 、分散 $\sigma^2=1.00$ である。最近、現場から、この特性値のばらつきが大きくなったとの問題提起があったため、サンプリングを行い31個のデータを得たところ、平均値 $\bar{x}=10.3$ 、(不偏)分散 $V=1.3$ 、平方和 $S=39$ であった。このとき、工程のばらつきが大きくなったか否かの検定の手順は以下のとおりである。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
- 対立仮説 $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ (右片側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha=0.05$ とする。

手順3 統計量の計算

$$\chi_0^2 = 39/1.00 = 39$$

手順4 検定

$\sigma^2 > \sigma_0^2 \rightarrow$ (ばらつきが大きくなったか否かを検定するので) 右片側検定 χ^2 表において ($\alpha=P$) として、 $\chi^2(\phi, P) = \chi^2(30, 0.05) = 43.7730$ となる。

※ データ数 $n=31$ 個なので、自由度 $\phi = n-1=30$ となる

(参考) χ^2 表 (一部抜粋)							
$\phi \backslash P$	0.995	0.990	0.985	0.975	0.970	0.950	0.050
1	0.00003927	0.0001571	0.0003535	0.0009821	0.001414	0.003932	3.84146
2	0.010025	0.020101	0.030227	0.050636	0.060918	0.102587	5.99146
3	0.071722	0.114832	0.151574	0.215795	0.245795	0.351846	7.81473
14	4.07467	4.66043	5.05724	5.62873	5.85563	6.57063	23.6848
15	4.60092	5.22935	5.65342	6.26214	6.50322	7.26094	24.9958
16	5.14221	5.81221	6.26280	6.90766	7.16251	7.96165	26.2962
17	5.69722	6.40776	6.88415	7.56419	7.83241	8.67176	27.5871
18	6.26480	7.01491	7.51646	8.23075	8.51199	9.39046	28.8693
19	6.84397	7.63273	8.15884	8.90652	9.20044	10.1170	30.1435
20	7.43384	8.26040	8.81050	9.59078	9.89708	10.8508	31.4104
21	8.03365	8.89720	9.47076	10.2829	10.6013	11.5913	32.6706
22	8.64272	9.54249	10.1390	10.9823	11.3125	12.3380	33.9244
23	9.26042	10.1957	10.8147	11.6886	12.0303	13.0905	35.1725
24	9.88623	10.8564	11.4974	12.4012	12.7543	13.8484	36.4150
25	10.5197	11.5240	12.1867	13.1197	13.4840	14.6114	37.6525
26	11.1602	12.1981	12.8821	13.8439	14.2190	15.3792	38.8851
27	11.8076	12.8785	13.5833	14.5734	14.9592	16.1514	40.1133
28	12.4613	13.5647	14.2900	15.3079	15.7042	16.9279	41.3371
29	13.1211	14.2565	15.0019	16.0471	16.4538	17.7084	42.5570
30	13.7867	14.9535	15.7188	16.7908	17.2076	18.4927	43.7730

$\chi_0^2 < \chi^2(30, 0.05) = 43.7730$ となることから、**有意ではない**(ばらつきは大きくなっていない)。帰無仮説は棄却されず、対立仮説は成立しない。

手順5 推定

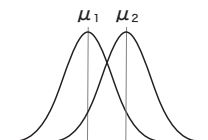
- 点推定 : $\hat{\sigma}^2 = V = 1.3$ ($\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の推定値)
- 区間推定 : $S/\chi^2(n-1, \alpha/2) < \sigma^2 < S/\chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$
 (上限) $\sigma_{\text{U}}^2 = S/\chi^2(\phi, 1-\alpha/2) = 39/\chi^2(30, 0.975) = 39/16.7908$
 ≈ 2.32
 (下限) $\sigma_{\text{L}}^2 = S/\chi^2(\phi, \alpha/2) = 39/\chi^2(30, 0.025) = 39/46.9792$
 ≈ 0.83
 よって、 $0.83 < \sigma^2 < 2.32$

計量値データに基づく検定と推定

3) 2つの母平均の差に関する検定と推定

2つの集団の母平均の違いを調べたいときに、2つの母平均の差に関する検定と推定を行います。2つの集団は正規分布に従っていて、その平均値は互いに独立していることが前提となります。

※独立していない場合は、データに対応がある場合の検定・推定を行います。



2つの集団それぞれからランダムにサンプルを取り、それぞれの分散 V_1 、 V_2 と、平均値 $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$ を比較します。

$\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$ は互いに独立しており、 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ の分布は正規分布 $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$ に従いますので、これを標準化すると、

$$Z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{となります。}$$

σ_1^2 、 σ_2^2 が未知の場合は、 t 検定を行います。母分散が等しいと考えられる場合と、等しいかどうか分からない場合があるので、2つの場合に分けて検定と推定を行います。

①母分散が等しいと考えられる場合

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (両側検定)、
 $\mu_1 > \mu_2$ (右片側検定)、 $\mu_1 < \mu_2$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

平均値 $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$ および平方和 S_1 、 S_2 を計算し、共通の分散(併合分散)を計算する。

$$V = s^2 = \frac{S_1 + S_2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

次に、検定統計量を計算する。

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{V\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

手順4 検定

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の場合、 $|t_0| > t(\phi_1 + \phi_2, \alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ の場合、 $t_0 \leq -t(\phi_1 + \phi_2, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。※ $\phi = n - 1$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ の場合、 $t_0 \geq t(\phi_1 + \phi_2, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ($\widehat{\mu_1 - \mu_2}$ は $\mu_1 - \mu_2$ の推定値)
- 区間推定 : $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t(\phi_1 + \phi_2, \alpha) \sqrt{V\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$
 $\leq \mu_1 - \mu_2$
 $\leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t(\phi_1 + \phi_2, \alpha) \sqrt{V\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$
 $\phi = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = \phi_1 + \phi_2$

〈例〉2つの機械A、Bで製造された部品の重量に差があるかどうかを調べることに、以下のデータを得た。

A : 100, 101, 95, 102, 98, 103

B : 105, 108, 109, 100, 106

なお、母分散は等しいと考えられるものとする。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu_A = \mu_B$ ※機械A、Bの比較なので μ_A 、 μ_B とする
- 対立仮説 $H_1: \mu_A \neq \mu_B$ (両側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

平均値 $\bar{x}_A$ 、 $\bar{x}_B$ および平方和 S_A 、 S_B を計算し、共通の分散(併合分散)を計算する。

$$\bar{x}_A = \frac{100+101+95+102+98+103}{6} = 99.83$$

$$\bar{x}_B = \frac{105+108+109+100+106}{5} = 105.6$$

$$\begin{aligned} S_A &= \sum x_{Ai}^2 - (\sum x_{Ai})^2 / n_A \\ &= 100^2 + 101^2 + 95^2 + 102^2 + 98^2 + 103^2 \\ &\quad - \frac{(100+101+95+102+98+103)^2}{6} = 42.83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B &= \sum x_{Bi}^2 - (\sum x_{Bi})^2 / n_B \\ &= 105^2 + 108^2 + 109^2 + 100^2 + 106^2 \\ &\quad - \frac{(105+108+109+100+106)^2}{5} = 49.2 \end{aligned}$$

$$V = s^2 = \frac{S_A + S_B}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} = \frac{42.83 + 49.2}{(6 - 1) + (5 - 1)} = \frac{92.03}{9} = 10.23$$

次に、検定統計量を計算する。

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{V\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{99.83 - 105.6}{\sqrt{10.23\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)}} = \frac{-5.77}{1.94} = -2.97$$

手順4 検定

$$\begin{aligned} t(\phi_A + \phi_B, \alpha) &= t((6 - 1) + (5 - 1), 0.05) \\ &= t(9, 0.05) = 2.262 \quad \text{※ } \phi = n - 1 \end{aligned}$$

(参考) t 表(一部抜粋)

自由度 ϕ と両側確率 P から t を求める表

$\phi \backslash P$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228

$|t_0| = 2.97 > t(9, 0.05) = 2.262$ であることから、有意となり、 $H_0: \mu_A = \mu_B$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\widehat{\mu_A - \mu_B} = \bar{x}_A - \bar{x}_B = 99.83 - 105.6 = -5.77$
 - 区間推定 : $(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - t(\phi_A + \phi_B, \alpha) \sqrt{V(1/n_A + 1/n_B)} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + t(\phi_A + \phi_B, \alpha) \sqrt{V(1/n_A + 1/n_B)}$

$$\begin{aligned} \text{(上限)} \quad (\mu_A - \mu_B)_U &= (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + t(\phi_A + \phi_B, \alpha) \sqrt{V(1/n_A + 1/n_B)} \\ &= -5.77 + 2.262 \times 1.94 = -1.38 \\ \text{(下限)} \quad (\mu_A - \mu_B)_L &= (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - t(\phi_A + \phi_B, \alpha) \sqrt{V(1/n_A + 1/n_B)} \\ &= -5.77 - 2.262 \times 1.94 = -10.16 \end{aligned}$$
- よって、 $-10.16 \leq \mu_A - \mu_B \leq -1.38$

②母分散が等しいかどうか分からない場合

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (両側検定)、
 $\mu_1 > \mu_2$ (右片側検定)、 $\mu_1 < \mu_2$ (左片側検定) のいずれか
 ※ 与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

平均値 $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$ および分散 V_1 、 V_2 を計算する。

また、分散 V_1 、 V_2 および自由度 ϕ_1 、 ϕ_2 を用いて、自由度 ϕ^* を求める。

この自由度 ϕ^* は等価自由度と呼ばれ、以下の式で求められる。

$$\phi^* = (V_1/n_1 + V_2/n_2)^2 / \{ (V_1/n_1)^2 / \phi_1 + (V_2/n_2)^2 / \phi_2 \}$$

この計算式をサタスウェイトの方法という。計算が複雑なため、以下の関係式を使って検算を行うとよい。

$(\phi_1 \text{ と } \phi_2 \text{ のいずれか小さい方}) < \phi^* < \phi_1 + \phi_2$

※ なお、必ずしも整数にならないので、補間を行う

〈補間〉 例えば、 $\phi^* = 5.6$ となった場合、

$t(\phi^*, 0.05) = t(5.6, 0.05)$ の値を、

5.6 は 5 と 6 の間の数であることから、

$t(5, 0.05) = 2.571$ と $t(6, 0.05) = 2.447$ の 2 つの値を用いて、

以下の補間により求める。

$$t(5.6, 0.05) = (1 - 0.6) \times t(5, 0.05) + 0.6 \times t(6, 0.05)$$

$$= 0.4 \times 2.571 + 0.6 \times 2.447 = 2.4966$$

※ なお、補間とは、数値と数値の間にあるはずの数値を想定すること、割り出すことという意味である

次に、検定統計量を計算する。

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{V_1}{n_1} + \frac{V_2}{n_2}}}$$

(ウェルチの(t)検定とサタスウェイトの方法)

ウェルチの(t)検定は、2つの標本の母平均の差の検定を行う計算の仕方。2つの標本のサンプルサイズ(n)、平均値($\bar{x}$)、不偏分散(V)を基にして上の式から t_0 値を計算し、「2つの標本の母集団の平均値が等しい」という帰無仮説を検定する。

サタスウェイトの方法は、独立した標本の線形結合の有効自由度を近似計算するために使用されるものである。

手順4 検定

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ の場合、 $|t_0| > t(\phi^*, \alpha)$ であれば有意となり、帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。すなわち対立仮説 H_1 が成立する。

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ の場合、 $t_0 \leq -t(\phi^*, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ の場合、 $t_0 \geq t(\phi^*, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

● 点推定 : $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

● 区間推定 : $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t(\phi^*, \alpha) \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t(\phi^*, \alpha) \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2}$

〈例〉2つの機械A、Bで製造された部品の重量に差があるかどうかを調べることになり、以下のデータを得た。

A : 100, 101, 95, 102, 98, 103

B : 105, 108, 109, 100, 106

なお、母分散は等しいかどうか分からないものとする。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu_A = \mu_B$
- 対立仮説 $H_1: \mu_A \neq \mu_B$ (両側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

平均値 $\bar{x}_A$ 、 $\bar{x}_B$ および分散 V_A 、 V_B を計算する。

$$\bar{x}_A = \frac{100+101+95+102+98+103}{6} \doteq 99.83$$

$$\bar{x}_B = \frac{105+108+109+100+106}{5} = 105.6$$

$$\begin{aligned} S_A &= \sum x_{Ai}^2 - (\sum x_{Ai})^2 / n_A \\ &= 100^2 + 101^2 + 95^2 + 102^2 + 98^2 + 103^2 \\ &\quad - \frac{(100+101+95+102+98+103)^2}{6} \doteq 42.83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B &= \sum x_{Bi}^2 - (\sum x_{Bi})^2 / n_B \\ &= 105^2 + 108^2 + 109^2 + 100^2 + 106^2 \\ &\quad - \frac{(105+108+109+100+106)^2}{5} = 49.2 \end{aligned}$$

$$V_A = \frac{S_A}{n_A - 1} = \frac{42.83}{6 - 1} = \frac{42.83}{5} \doteq 8.57$$

$$V_B = \frac{S_B}{n_B - 1} = \frac{49.2}{5 - 1} = \frac{49.2}{4} = 12.3$$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{V_A}{n_A} + \frac{V_B}{n_B}}} = \frac{99.83 - 105.6}{\sqrt{\frac{8.57}{6} + \frac{12.3}{5}}} \doteq -2.93$$

分散 V_A 、 V_B および自由度 ϕ_A 、 ϕ_B を用いて、サタスウェイトの方法により、自由度 ϕ^* を求める。

$$\begin{aligned} \phi^* &= \left(\frac{V_A}{n_A} + \frac{V_B}{n_B} \right)^2 / \left\{ \left(\frac{V_A}{n_A} \right)^2 / \phi_A + \left(\frac{V_B}{n_B} \right)^2 / \phi_B \right\} \\ &= \left(\frac{8.57}{6} + \frac{12.3}{5} \right)^2 / \left\{ \left(\frac{8.57}{6} \right)^2 / 5 + \left(\frac{12.3}{5} \right)^2 / 4 \right\} \doteq 7.87 \end{aligned}$$

$$\phi_A = n_A - 1, \quad \phi_B = n_B - 1$$

手順4 検定

$$|t_0| = 2.93$$

$$t(\phi^*, \alpha) = t(7.87, 0.05) \leq t(7, 0.05) = 2.365$$

$$\begin{aligned} \text{補間すると、} \quad t(7.87, 0.05) &= (1 - 0.87) \times t(7, 0.05) + 0.87 \times t(8, 0.05) \\ &= 0.13 \times 2.365 + 0.87 \times 2.306 = 2.31367 \doteq 2.314 \end{aligned}$$

※本番の検定においては、 ϕ の小数点以下を四捨五入して求めた答えを「=」で示してもよい

(参考) t 表 (一部抜粋)

自由度 ϕ と両側確率 P から t を求める表

$\phi \backslash P$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306

$|t_0| = 2.93 > t(7, 0.05) = 2.365$ であるので有意となり、 $H_0: \mu_A = \mu_B$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定 (点推定、区間推定)

$$\bullet \text{ 点推定 : } \widehat{\mu_A - \mu_B} = \bar{x}_A - \bar{x}_B = 99.83 - 105.6 = -5.77$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 区間推定 : } (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - t(\phi^*, \alpha) \sqrt{V_A/n_A + V_B/n_B} &\leq \mu_A - \mu_B \\ &\leq (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + t(\phi^*, \alpha) \sqrt{V_A/n_A + V_B/n_B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{上限}) \quad (\mu_A - \mu_B)_U &= (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + t(\phi^*, \alpha) \sqrt{V_A/n_A + V_B/n_B} \\ &= -5.77 + 2.314 \sqrt{\frac{8.57}{6} + \frac{12.3}{5}} = -1.21 \end{aligned}$$

※補間した数値
2.314を使う

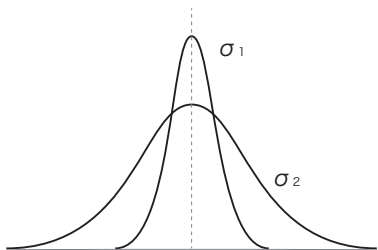
$$\begin{aligned} (\text{下限}) \quad (\mu_A - \mu_B)_L &= (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - t(\phi^*, \alpha) \sqrt{V_A/n_A + V_B/n_B} \\ &= -5.77 - 2.314 \sqrt{\frac{8.57}{6} + \frac{12.3}{5}} = -10.33 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} -10.33 \leq \mu_A - \mu_B \leq -1.21$$

計量値データに基づく検定と推定

4) 2つの母分散の比に関する検定と推定

2つの母分散を比較する場合、母集団のばらつきがほぼ同じであれば問題ありませんが、母集団のばらつきが異なっている場合はこれも踏まえて、2つの母集団の母分散を比較しなければなりません。



それぞれの母集団のサンプルの分散 V_1 、 V_2 の F 値、 $F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}$ が、 F 分布(自由度 $\phi_1 (= n_1 - 1)$ 、 $\phi_2 (= n_2 - 1)$)に従うことを利用して検定と推定を行います。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- 対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (両側検定)、
 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (右片側検定)、 $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

分散 V_1 、 V_2 を計算する。 V_1 、 V_2 のうち大きい方を分子に持ってくる。

$$V_1 \geq V_2 \text{ の場合、 } F_0 = \frac{V_1}{V_2} (\phi_1 = n_1 - 1, \phi_2 = n_2 - 1)$$

$$V_1 < V_2 \text{ の場合、 } F_0 = \frac{V_2}{V_1} (\phi_1 = n_2 - 1, \phi_2 = n_1 - 1)$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量 F_0 と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ の場合、 $F_0 \geq F(\phi_1, \phi_2; \alpha/2)$ であれば有意となり、 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ の場合、 $F_0 \geq F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ の場合、 $F_0 \leq F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2 = V_1 / V_2$
- 区間推定 : $F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}$ は自由度 $n_1 - 1$ 、 $n_2 - 1$ の F 分布に従うことから、

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} \times \frac{1}{F(\phi_1, \phi_2; \alpha/2)} &\leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{V_1}{V_2} \times \frac{1}{F(\phi_1, \phi_2; 1 - \alpha/2)} \\ \left(\frac{1}{F(\phi_1, \phi_2; 1 - \alpha/2)} = F(\phi_2, \phi_1; \alpha/2) \text{ の関係があることを利用して} \right) \\ \frac{V_1}{V_2} \times \frac{1}{F(\phi_1, \phi_2; \alpha/2)} &\leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{V_1}{V_2} \times F(\phi_2, \phi_1; \alpha/2) \end{aligned}$$

〈例〉2つの機械A、Bで製造された部品の重量の分散に差があるかどうかを調べることになり、以下のデータを得た。

A : 100, 101, 95, 102, 98, 103

B : 105, 108, 109, 100, 106

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$
- 対立仮説 $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ (両側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

平方和 S_A 、 S_B および分散 V_A 、 V_B を計算する。

$$\begin{aligned} S_A &= \sum x_{Ai}^2 - (\sum x_{Ai})^2 / n_A \\ &= 100^2 + 101^2 + 95^2 + 102^2 + 98^2 + 103^2 \\ &\quad - \frac{(100 + 101 + 95 + 102 + 98 + 103)^2}{6} = 42.83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B &= \sum x_{Bi}^2 - (\sum x_{Bi})^2 / n_B \\ &= 105^2 + 108^2 + 109^2 + 100^2 + 106^2 \\ &\quad - \frac{(105 + 108 + 109 + 100 + 106)^2}{5} = 49.2 \end{aligned}$$

※分散比 F_0 は、回帰による不偏分散 V_R を残差による不偏分散 V_e で割った値。 $F_0 = V_R / V_e$

5) データに対応がある場合の検定と推定

データに対応がある場合とは、2つの母集団の独立性が成立していない場合です。母平均の差 $\mu_d(=\mu_1-\mu_2)$ を調べるためのデータが同一対象物に対して組になっていて、互いに関係しているということです。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu_d = 0$
- 対立仮説 $H_1: \mu_d \neq 0$ (両側検定)
 $\mu_d > 0$ (右片側検定)、 $\mu_d < 0$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

データの差の平均値 $\bar{d}$ 、分散 V_d を計算する。

統計量 t_0 を計算する。

$$t_0 = \bar{d} / \sqrt{V_d / n}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量 t_0 と確率分布表から求めた棄却限界値 $t(\phi, \alpha)$ とを比較して判定する。※ $\phi = n - 1$

- $H_1: \mu_d \neq 0$ (両側検定)の場合、 $|t_0| \geq t(\phi, \alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_d = 0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \mu_d > 0$ (右片側検定)の場合、 $t_0 \geq t(\phi, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_d = 0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: \mu_d < 0$ (左片側検定)の場合、 $t_0 \leq -t(\phi, 2\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_d = 0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{d}$

- 区間推定 : $\bar{d} - t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V_d}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{d} + t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V_d}{n}}$

$$V_A = \frac{S_A}{n_A - 1} = \frac{42.83}{6 - 1} = \frac{42.83}{5} \doteq 8.57$$

$$V_B = \frac{S_B}{n_B - 1} = \frac{49.2}{5 - 1} = \frac{49.2}{4} = 12.3$$

$$V_A < V_B \text{なので、} F_0 = V_B / V_A = 12.3 / 8.57 \doteq 1.44$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

$$F(\phi_A, \phi_B; \alpha/2) = F(4, 5; 0.025) = 7.39$$

$$(\phi_A = n_A - 1, \phi_B = n_B - 1)$$

(参考) F表②(一部抜粋)

$F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$ $\alpha = 0.025$
 ϕ_1 = 分子の自由度 ϕ_2 = 分母の自由度

$\phi_2 \backslash \phi_1$	1	2	3	4	5
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15

$F_0 = 1.44 < F(4, 5; 0.025) = 7.39$ となるため、有意とならず、 $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ は棄却されない。

手順5 推定(点推定、区間推定)

(検定の結果が有意ではないが、参考までに行ってみる。)

- 点推定 : $\hat{\sigma}_A^2 / \hat{\sigma}_B^2 = V_A / V_B = \frac{8.57}{12.3} \doteq 0.70$

- 区間推定 : $F = \frac{V_A / \sigma_A^2}{V_B / \sigma_B^2}$ は自由度 $n_A - 1$ 、 $n_B - 1$ のF分布に従うことから、

$$\frac{V_A}{V_B} \times \frac{1}{F(\phi_A, \phi_B; \alpha/2)} \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq \frac{V_A}{V_B} \times F(\phi_B, \phi_A; \alpha/2)$$

$$0.70 \times \frac{1}{9.36} \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq 0.70 \times 7.39$$

$$0.07 \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq 5.17$$

〈例〉A工場における部品Bの受入検査において、外注先の検査による合否判定をしていたが、A工場の検査室にて外注先の検査の合否判定の正確性を確認することになった。外注先が検査のための測定を行ったあるロットの部品Bのサンプルを5つ取り、検査室でも測定を行ったところ、測定値(cm)は下表のとおりであった。

サンプル番号	1	2	3	4	5
外注先	3.5	3.4	3.8	3.9	3.5
検査室	3.2	3.3	3.5	3.7	3.0
データの差	0.3	0.1	0.3	0.2	0.5

外注先と検査室とで測定値の母平均に差があるかどうかを検討する。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \mu_d = 0$
- 対立仮説 $H_1: \mu_d \neq 0$ (差があるかどうかを検定するので) 両側検定

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

データの差の平均値 $\bar{d}$ を求める。

$$\bar{d} = \frac{0.3 + 0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.5}{5} = \frac{1.4}{5} = 0.28$$

$$S = \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2 / n$$

$$= 0.3^2 + 0.1^2 + 0.3^2 + 0.2^2 + 0.5^2 - \frac{(0.3 + 0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.5)^2}{5}$$

$$= 0.48 - 0.39 = 0.09$$

$$\text{分散 } V_d = S / (n - 1) = 0.09 / 4 = 0.0225$$

$$\text{統計量 } t_0 = \bar{d} / \sqrt{V_d / n} = 0.28 / \sqrt{0.0225 / 5} = 4.17$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。 ※ $\phi = n - 1$

- $H_1: \mu_d \neq 0$ (両側検定) の場合、 $|t_0| \geq t(\phi, \alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: \mu_d = 0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
 $t(\phi, \alpha) = t(4, 0.05) = 2.776$

(参考) t 表 (一部抜粋)

自由度 ϕ と両側確率 P から t を求める表

$\phi \backslash P$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228

$$|t_0| = 4.17 > t(4, 0.05) = 2.776$$

となるので、有意となり、 $H_0: \mu_d = 0$ は棄却される。

手順5 推定 (点推定、区間推定)

- 点推定 : $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{d} = 0.28$

- 区間推定 : $\bar{d} - t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V_d}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{d} + t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V_d}{n}}$

$$(\text{上限}) \quad \bar{d} + t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V_d}{n}} = 0.28 + 2.776 \sqrt{\frac{0.0225}{5}} \approx 0.47$$

$$(\text{下限}) \quad \bar{d} - t(\phi, \alpha) \sqrt{\frac{V_d}{n}} = 0.28 - 2.776 \sqrt{\frac{0.0225}{5}} \approx 0.09$$

よって、 $0.09 < \mu_1 - \mu_2 < 0.47$

(2) 計数値データに基づく検定と推定

計数値は離散的な分布であり、連続的な分布として表せませんが、連続的な分布に近似して検定と推定を行います。

1) 母不適合品率に関する検定と推定

母集団から、試料 n を採取して検査した際に、不適合品が x 個あったときに、 x/n が母不適合品率 P_0 と等しいかを検定します。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: P = P_0$
- 対立仮説 $H_1: P \neq P_0$ (両側検定)、
 $P > P_0$ (右片側検定)、 $P < P_0$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

サンプル中の不適合品数 x より、 $p = x/n$ を計算する。

統計量 u_0 を計算する。

$$u_0 = (x - nP_0) / \sqrt{nP_0(1 - P_0)}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: P \neq P_0$ (両側検定) の場合、 $|u_0| \geq u(\alpha/2)$ であれば有意となり、 $H_0: P = P_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: P > P_0$ (右片側検定) の場合、 $u_0 \geq u(\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: P = P_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: P < P_0$ (左片側検定) の場合、 $u_0 \leq -u(\alpha)$ であれば有意となり、 $H_0: P = P_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\hat{P} = p = x/n$

- 区間推定 : $p - u(\alpha/2) \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq P \leq p + u(\alpha/2) \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

〈例〉ある工場でビニル製品の加工不適合品率は $P = 0.1$ であった。今回、不適合品率の改善のため、ラインの一部を変更して加工を行い、サンプル $n = 100$ をとって検査したところ、不適合品数 $x = 15$ 個であった。不適合品率は変化したといえるかを確認する。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: P = P_0$
- 対立仮説 $H_1: P \neq P_0$
 (変化したかどうかなので(増えたか、減ったかではないので))両側検定

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

$$\begin{aligned} u_0 &= (x - nP_0) / \sqrt{nP_0(1 - P_0)} \\ &= (15 - 100 \times 0.1) / \sqrt{100 \times 0.1(1 - 0.1)} \\ &= 5 / \sqrt{9} \doteq 1.67 \end{aligned}$$

手順4 検定

$P \neq P_0 \rightarrow$ 両側検定 $|u_0| < u(\alpha/2) = u(0.05/2) = u(0.025) = 1.960$ となることから有意ではなく、帰無仮説は棄却されず、対立仮説は棄却される。

(参考) 正規分布表(一部抜粋)

※両側検定なので、 $\alpha/2 = 0.025$ となる。

(II) P から K_p を求める表

P	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400
K_p	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.524	0.253

手順5 推定(点推定、区間推定)

- 点推定 : $\hat{P} = p = x/n = 15/100 = 0.15$

- 区間推定 : $p - u(\alpha/2) \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq P \leq p + u(\alpha/2) \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$$(\text{上限}) P_U = p + 1.960 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.15 + 1.960 \sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}}$$

$$= 0.15 + 1.960 \sqrt{\frac{0.1275}{100}} \doteq 0.22$$

$$(\text{下限}) P_L = p - 1.960 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.15 - 1.960 \sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}}$$

$$= 0.15 - 1.960 \sqrt{\frac{0.1275}{100}} \doteq 0.08$$

よって、 $0.08 \leq P \leq 0.22$

2) 2つの母不適合品率の違いに関する検定と推定

2つの母不適合品率(P_1 、 P_2)から、それぞれ n_1 、 n_2 個のサンプルを抜取検査した際に、不適合品がそれぞれ x_1 、 x_2 個あったときに、この2つの母不適合品率(P_1 、 P_2)が等しいかどうかを検定します。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: P_1 = P_2$
- 対立仮説 $H_1: P_1 \neq P_2$ (両側検定)、
 $P_1 > P_2$ (右片側検定)、 $P_1 < P_2$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

サンプル中の不適合品数 x_1 、 x_2 より、不適合品率 P_1 、 P_2 を計算する。

$$\bar{P} = (x_1 + x_2) / (n_1 + n_2)$$

統計量 u_0 を計算する。

$$u_0 = (P_1 - P_2) / \sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: P_1 \neq P_2$ (両側検定)の場合、 $|u_0| \geq u(\alpha/2) = 1.960$ であれば有意となり、 $H_0: P_1 = P_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: P_1 > P_2$ (右片側検定)の場合、 $u_0 \geq u(\alpha) = 1.645$ であれば有意となり、 $H_0: P_1 = P_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: P_1 < P_2$ (左片側検定)の場合、 $u_0 \leq -u(\alpha) = -1.645$ であれば有意となり、 $H_0: P_1 = P_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

(参考) 正規分布表 (一部抜粋)

(II) P から K_P を求める表

P	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400
K_P	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.524	0.253

手順5 推定 (点推定、区間推定)

● 点推定 : $\widehat{P_1 - P_2} = P_1 - P_2 = \frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}$

● 区間推定 :

$$\begin{aligned} & (P_1 - P_2) - 1.960 \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}} \\ & \leq P_1 - P_2 \\ & \leq (P_1 - P_2) + 1.960 \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}} \end{aligned}$$

〈例〉2つのラインで生産されている自動車部品がある。各ラインから500個ずつサンプルを抜取検査したところ、Aラインでは $x_1 = 12$ 個、Bラインでは $x_2 = 10$ 個の不適合品が見つかった。ラインによって母不適合品率に違いがあるかを確認する。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: P_1 = P_2$
- 対立仮説 $H_1: P_1 \neq P_2$ (両側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

不適合品数 $x_1 = 12$ 、 $x_2 = 10$ より、

不適合品率 $P_1 = 12/500 = 0.024$ 、 $P_2 = 10/500 = 0.020$

$$\bar{P} = (x_1 + x_2) / (n_1 + n_2)$$

$$= (12 + 10) / (500 + 500) = 22 / 1000 = 0.022$$

$$\begin{aligned}
 \text{統計量 } u_0 &= (P_1 - P_2) / \sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \\
 &= (0.024 - 0.020) / \sqrt{0.022(1 - 0.022) \left(\frac{1}{500} + \frac{1}{500} \right)} \\
 &= 0.004 / \sqrt{0.022 \times 0.978 \times \frac{2}{500}} \\
 &\doteq 0.004 / \sqrt{0.0000861} \doteq \mathbf{0.43}
 \end{aligned}$$

手順4 検定

$P \neq P_0$ (両側検定) の場合、 $|u_0| < u(\alpha/2) = u(0.05/2) = u(0.025) = \mathbf{1.960}$ となることから **有意ではなく**、帰無仮説は棄却されず、対立仮説は棄却される。

(参考) 正規分布表 (一部抜粋)

※両側検定なので、 $\alpha/2 = 0.025$ となる。

(II) P から K_P を求める表

P	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400
K_P	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.524	0.253

手順5 推定 (点推定、区間推定)

- 点推定 : $\widehat{P_1 - P_2} = P_1 - P_2 = 0.024 - 0.020 = \mathbf{0.004}$
- 区間推定 : $(P_1 - P_2) - 1.960 \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}} \leq P_1 - P_2$
 $\leq (P_1 - P_2) + 1.960 \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}}$
 (上限) $(P_1 - P_2)_U = (P_1 - P_2) + \mathbf{1.960} \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}}$
 $= (0.024 - 0.020) + \mathbf{1.960} \sqrt{\frac{0.024(1 - 0.024)}{500} + \frac{0.020(1 - 0.020)}{500}}$
 $\doteq 0.004 + \mathbf{1.960} \sqrt{0.000086} \doteq 0.004 + \mathbf{0.01818} = \mathbf{0.02218}$
 (下限) $(P_1 - P_2)_L = (P_1 - P_2) - \mathbf{1.960} \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}}$
 $= (0.024 - 0.020) - \mathbf{1.960} \sqrt{\frac{0.024(1 - 0.024)}{500} + \frac{0.020(1 - 0.020)}{500}}$

$$\doteq 0.004 - \mathbf{1.960} \sqrt{0.000086} \doteq 0.004 - \mathbf{0.01818} = \mathbf{-0.01418}$$

よって、 $\mathbf{-0.01418} \leq P_1 - P_2 \leq \mathbf{0.02218}$

計数値データに基づく検定と推定

3) 母不適合品数に関する検定と推定

製品の欠損箇所や事故等のサンプル (n 個) の不適合数 (欠点数) x は母不適合数 (母欠点数) を m とするポアソン分布に従います。ポアソン分布は、 $m \geq 5$ だと正規分布 $N(m, \mathbf{m})$ に近似できることを利用して、検定と推定を行います。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: m = m_0$
- 対立仮説 $H_1: m \neq m_0$ (両側検定)、
 $m > m_0$ (右片側検定)、 $m < m_0$ (左片側検定) のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

サンプル中の不適合品数の平均値 $\bar{c}$ を計算する。 $\bar{c} = x/n$

統計量 u_0 を計算する。

$$u_0 = (\bar{c} - m_0) / \sqrt{m_0/n}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: m \neq m_0$ (両側検定) の場合、 $|u_0| \geq u(\alpha/2) = 1.960$ であれば有意となり、 $H_0: m = m_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: m > m_0$ (右片側検定) の場合、 $u_0 \geq u(\alpha) = 1.645$ であれば有意となり、 $H_0: m = m_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: m < m_0$ (左片側検定) の場合、 $u_0 \leq \mathbf{-u}(\alpha) = -1.645$ であれば有意となり、 $H_0: m = m_0$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定(点推定、区間推定)

●点推定 : $\hat{m} = \bar{c} = x / n$

●区間推定 : $\bar{c} - u(\alpha/2) \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} \leq m \leq \bar{c} + u(\alpha/2) \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}}$

$$\bar{c} - 1.960 \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} \leq m \leq \bar{c} + 1.960 \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}}$$

〈例〉ある工程で加工されるガラス板には、従来 1 m²あたり平均 5 個のキズが発生していた。これを改善し、その効果を確認するために、サンプルを抜き取り、10 m²のガラス板を検査したところ、合計 12 個のキズが発生していた。母不適合数が減少したかどうかを確認する。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0 : m = m_0$
- 対立仮説 $H_1 : m < m_0$ (減少したかどうかなので) 左片側検定

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

サンプル中の不適合品数の平均値 $\bar{c}$ を計算する。

$$\bar{c} = x / n = 12 / 10 = 1.2$$

統計量 u_0 を計算する。

$$u_0 = (\bar{c} - m_0) / \sqrt{m_0 / n} = (1.2 - 5) / \sqrt{5 / 10} = -\frac{3.8}{0.71} \doteq -5.35$$

手順4 検定

$m < m_0$ (左片側検定) で、 $u_0 \leq -u(\alpha) = -u(0.05) = -1.645$ となるので、有意となり、帰無仮説 $H_0 : m = m_0$ は棄却される。すなわち対立仮説 H_1 が成立する。

(参考) 正規分布表(一部抜粋)

※左片側なので、符号がマイナス(−)となる。

(II) P から K_P を求める表

P	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400
K_P	3.090	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	0.842	0.524	0.253

手順5 推定(点推定、区間推定)

●点推定 : $\hat{m} = \bar{c} = x / n = 1.2$

●区間推定 : $\bar{c} - u(\alpha/2) \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} \leq m \leq \bar{c} + u(\alpha/2) \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}}$

$$\begin{aligned} \text{(上限)} \quad (\bar{m})_U &= \bar{c} + 1.960 \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} = 1.2 + 1.960 \sqrt{\frac{1.2}{10}} \\ &\doteq 1.2 + 0.68 = 1.88 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(下限)} \quad (\bar{m})_L &= \bar{c} - 1.960 \sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} = 1.2 - 1.960 \sqrt{\frac{1.2}{10}} \\ &\doteq 1.2 - 0.68 = 0.52 \end{aligned}$$

よって、 $0.52 \leq m \leq 1.88$

計数値データに基づく検定と推定**4) 2つの母不適合数の違いに関する検定と推定**

2つの母集団から、それぞれ n_1 個、 n_2 個のサンプルを抜取検査した際に、不適合数(欠点数)の合計がそれぞれ x_1 個、 x_2 個あったときに、この2つの母不適合数(母欠点数) m_1 個、 m_2 個が等しいかどうかを検定します。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0 : m_1 = m_2$
- 対立仮説 $H_1 : m_1 \neq m_2$ (両側検定)、
 $m_1 > m_2$ (右片側検定)、 $m_1 < m_2$ (左片側検定)のいずれか※
 ※与条件などによる

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

不適合数(欠点数) x_1 、 x_2 から、 c_1 、 c_2 を計算する。

$$\bar{c} = (x_1 + x_2) / (n_1 + n_2)$$

$$c_1 = x_1 / n_1 \quad c_2 = x_2 / n_2$$

c_1 、 c_2 はサンプルの単位当たり不適合数(欠点数)を示す。

$\bar{c}$ はサンプルの単位当たりの全体の不適合数(欠点数)を示す。

統計量 u_0 を計算する。

$$u_0 = (c_1 - c_2) / \sqrt{\bar{c} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

手順4 検定

手順3で求めた検定統計量と確率分布表から求めた棄却限界値とを比較して判定する。

- $H_1: m_1 \neq m_2$ (両側検定) の場合、 $|u_0| \geq u(\alpha/2) = 1.960$ であれば有意となり、 $H_0: m_1 = m_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: m_1 > m_2$ (右片側検定) の場合、 $u_0 \geq u(\alpha) = 1.645$ であれば有意となり、 $H_0: m_1 = m_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。
- $H_1: m_1 < m_2$ (左片側検定) の場合、 $u_0 \leq -u(\alpha) = -1.645$ であれば有意となり、 $H_0: m_1 = m_2$ は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

手順5 推定

- 点推定 : $\widehat{m_1 - m_2} = c_1 - c_2 = \frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}$
- 区間推定 : $(c_1 - c_2) - u(\alpha/2) \times \sqrt{\left(\frac{c_1}{n_1} + \frac{c_2}{n_2} \right)} \leq m_1 - m_2$
 $\leq (c_1 - c_2) + u(\alpha/2) \times \sqrt{\left(\frac{c_1}{n_1} + \frac{c_2}{n_2} \right)}$
 $(c_1 - c_2) - 1.960 \times \sqrt{\left(\frac{c_1}{n_1} + \frac{c_2}{n_2} \right)}$
 $\leq m_1 - m_2 \leq (c_1 - c_2) + 1.960 \times \sqrt{\left(\frac{c_1}{n_1} + \frac{c_2}{n_2} \right)}$

〈例〉ある企業には2つの工場(A工場、B工場)がある。A工場では過去1年間で10件、B工場では過去9か月で20件の災害が発生した。工場によって災害発生件数の違いがあるかどうかを検定する。

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: m_A = m_B$
- 対立仮説 $H_1: m_A \neq m_B$ (両側検定)

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

災害発生件数 x_A 、 x_B から、 c_A 、 c_B 、 $\bar{c}$ を計算する。

$$c_A = 10/12 \div 0.83 \quad c_B = 20/9 \div 2.22$$

$$\bar{c} = (x_A + x_B) / (n_A + n_B) = (10 + 20) / (12 + 9) \div 1.43$$

※ n_A 、 n_B は月数とする

統計量 u_0 を計算する。

$$u_0 = (c_A - c_B) / \sqrt{\bar{c} \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)} = (0.83 - 2.22) / \sqrt{1.43 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9} \right)} \div -\frac{1.39}{0.53} \div -2.62$$

手順4 検定

$m_A \neq m_B$ (両側検定) で、 $|u_0| > 1.960$ (正規分布表参照) となるので有意となり、帰無仮説 $H_0: m_A = m_B$ は棄却され、対立仮説 H_1 は成立する。

手順5 推定

- 点推定 : $\widehat{m_A - m_B} = c_A - c_B = 0.83 - 2.22 = -1.39$
- 区間推定 : $(c_A - c_B) - u(\alpha/2) \times \sqrt{\left(\frac{c_A}{n_A} + \frac{c_B}{n_B} \right)} \leq m_A - m_B$
 $\leq (c_A - c_B) + u(\alpha/2) \times \sqrt{\left(\frac{c_A}{n_A} + \frac{c_B}{n_B} \right)}$
(上限) $(m_A - m_B)_U = (c_A - c_B) + 1.960 \times \sqrt{\left(\frac{c_A}{n_A} + \frac{c_B}{n_B} \right)}$
 $= (0.83 - 2.22) + 1.960 \times \sqrt{\frac{0.83}{12} + \frac{2.22}{9}}$
 $\div -1.39 + 1.960 \times 0.56 \div -0.29$

$$\begin{aligned}
 (\text{下限}) (m_A - m_B)_L &= (c_A - c_B) - 1.960 \times \sqrt{\left(\frac{c_A}{n_A} + \frac{c_B}{n_B}\right)} \\
 &= (0.83 - 2.22) - 1.960 \times \sqrt{\frac{0.83}{12} + \frac{2.22}{9}} \\
 &\doteq -1.39 - 1.960 \times 0.56 \doteq -2.49
 \end{aligned}$$

よって、 $-2.49 \leq m_A - m_B \leq -0.29$

計数値データに基づく検定と推定

5) 分割表による検定と推定

製品を適合品と不適合品に分類して、いくつかの母集団での不適合品率を比較したいときには、下のような分割表(2つ以上の変数の関係をまとめた表)を用いて検定と推定を行います。

$l \times m$ 分割表(例)

列 \ 行	B_1		B_m	計
A_1	x_{11}		x_{1m}	$T_{1.}$
$\vdots$				
A_l	x_{l1}		x_{lm}	$T_{l.}$
計	$T_{.1}$		$T_{.m}$	$T_{..}$

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 H_0 : 母集団によって差はない(行と列は独立している)。
- 対立仮説 H_1 : 母集団によって差はある(行と列は独立していない)。

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

期待度数 t_{ij} を計算する。 $t_{ij} = T_{i.} \times T_{.j} / T_{..}$

統計量 χ^2 を計算する。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{(x_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}}$$

手順4 検定

$\chi^2 \geq \chi^2(\phi, \alpha)$ であれば有意となり、 H_0 は棄却される。すなわち H_1 が成立する。自由度 $\phi = (\text{行数} - 1) \times (\text{列数} - 1)$

〈例〉2台の機器A、Bで部品を製作したところ、適合品と不適合品が下表のとおり発生した。機器A、Bによって適合品と不適合品の出方に違いがあるかどうかを検討する。

	適合品	不適合品	合計
A	160	40	200
B	120	20	140
合計	280	60	340

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 H_0 : 母集団によって差はない(行と列は独立している)。
- 対立仮説 H_1 : 母集団によって差はある(行と列は独立していない)。

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

期待度数 t_{ij} を計算する。 $t_{ij} = T_{i.} \times T_{.j} / T_{..}$

※期待度数とは、行要素の合計や列要素の合計の比率から逆算して期待される度数をいう

2 × 2 分割表

	適合品	不適合品	合計
A	$200 \times 280 / 340$ $\doteq 165$	$200 \times 60 / 340$ $\doteq 35$	200
B	$140 \times 280 / 340$ $\doteq 115$	$140 \times 60 / 340$ $\doteq 25$	140
合計	280	60	340

正解 (1) **ア** (2) **ウ** (3) **カ** (4) **キ** (5) **ス**
 (6) **コ** (7) **エ** (8) **ソ**

【問3】 C研究所の装置Dの改善を行った。改善前において、300個中、52個の不適合品が確認された。改善後において、460個中、75個の不適合品が確認された。このことを踏まえ、改善の効果の有無を確認することになった。□内に入るもっとも適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。※(1)(2)(8)には符号が入る

手順1 仮説の設定

改善前の不適合品率を P_1 、改善後の不適合品率を P_2 とすると、

- 帰無仮説 $H_0: P_1 \square (1) \square P_2$
- 対立仮説 $H_1: P_1 \square (2) \square P_2$

手順2 有意水準 α の設定

$\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

サンプル中 (n_1 、 n_2) の不適合品数 x_1 、 x_2 より、不適合品率 P_1 、 P_2 を計算すると、

$$P_1 = \square (3) \square, P_2 = \square (4) \square$$

$$\bar{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \square (5) \square$$

統計量 u_0 の計算式は、

$$u_0 = \square (6) \square$$

手順4 検定

$u_0 = \square (7) \square$ 、 $u_0 \square (8) \square u(0.05) = 1.645$ となることから、 $\square (9) \square$ 。

〈選択肢〉

ア. = **イ.** ≠ **ウ.** < **エ.** > **オ.** 0.163

カ. 0.167 **キ.** 0.173 **ク.** 0.361

ケ. $(x - nP_0) / \sqrt{nP_0(1 - P_0)}$

コ. $(P_1 - P_2) / \sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$

サ. 有意となり、 H_0 は棄却される

シ. 有意とならず、 H_0 は棄却されない

正解 (1) **ア** (2) **エ** (3) **キ** (4) **オ** (5) **カ**
 (6) **コ** (7) **ク** (8) **ウ** (9) **シ**

解答・解説

【問1】 仮説の考え方(帰無仮説と対立仮説)

(1) **ア** (2) **エ** (3) **イ** (4) **ウ**

※(1)と(2)、(3)と(4)はそれぞれ順不同

帰無仮説 H_0 が正しいのに、棄却してしまう誤りを[**ア. 第1種の誤り**]または[**エ. あわてものの誤り**]という。一方、対立仮説 H_1 が正しいのに、棄却してしまう誤りを[**イ. 第2種の誤り**]または[**ウ. ぼんやりものの誤り**]という。

【問2】 1つの母平均に関する検定と推定

(1) **ア** (2) **ウ** (3) **カ** (4) **キ** (5) **ス**

(6) **コ** (7) **エ** (8) **ソ**

帰無仮説は改善の効果がない(この問題では「低下していない」とするものなので、(1)には「**ア. =**」が入る。一方、対立仮説は改善の効果がある(低下している)とするものなので、(2)には「**ウ. <**」が入る。

問題文にあるデータ {1.3, 1.4, 1.2, 1.4, 1.6, 1.3, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5} の平均を求めると、 $\bar{x} = \text{カ. } 1.36$ となる。

第5章

相関分析と
単回帰分析

合格のポイント

→ 相関分析(相関係数の計算、無相関の検定、寄与率による検討)、
回帰式の基礎的な計算と分散分析表の作成手順の理解

また、平方和 $S \left(= \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)$ を求めると、 $18.64 - \frac{13.6^2}{10} = 0.144$ となる。

これを用いて分散 $V \left(= \frac{S}{n-1} \right)$ を求めると、**キ. 0.016** となる。

平方和の計算が若干手間ではあるが、実際の問題では平方和の値が与えられる場合も多い。

$$t_0 = \text{ス. } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{V/n}} = \frac{1.36 - 1.4}{\sqrt{\frac{0.016}{10}}} = \frac{-0.04}{\sqrt{0.0016}} = \frac{-0.04}{0.04} = \text{コ. } -1.00$$

$$-t(\phi, 2\alpha) = -t(9, 0.1) = -1.833$$

$t_0 \text{ **エ.** } > -t(\phi, 2\alpha)$ となるので、**ソ. 有意とならず、帰無仮説 H_0 は棄却されない。**

【問3】 2つの母不適合品率の違いに関する検定と推定

- (1) **ア** (2) **エ** (3) **キ** (4) **オ** (5) **カ**
(6) **コ** (7) **ク** (8) **ウ** (9) **シ**

帰無仮説は改善の効果が無いとするものなので、(1)には「**ア. =**」が入る。
一方、対立仮説は改善の効果がある(改善前の不適合品率 $P_1 >$ 改善後の不適合品率 P_2)とするものなので、(2)には「**エ. >**」が入る。

問題文より、

$$P_1 = (3) = \frac{52}{300} \div \text{キ. } 0.173, P_2 = (4) = \frac{75}{460} \div \text{オ. } 0.163$$

$$\bar{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = (5) = \frac{52 + 75}{300 + 460} \div \text{カ. } 0.167$$

$$u_0 = (6) = \text{コ. } \frac{(P_1 - P_2) / \sqrt{\bar{P}(1 - \bar{P}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}{\sqrt{0.167(1 - 0.167) \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{460} \right)}} \div \text{ク. } 0.361$$

$u_0 = \text{0.361}$ **ウ. <** 1.645 となることから、**シ. 有意とならず、 H_0 は棄却されない。**

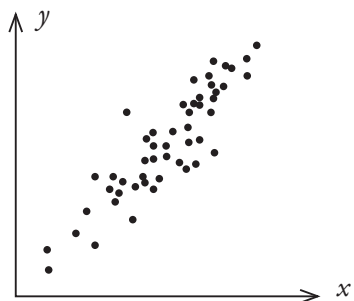
1 相関分析

相関分析とは、2つの変数(特性値：原因と結果)の関係性の強さを分析することです。2つの変数 x (要因変数)、 y (結果変数)において、 x の連続的な変化に対して、 y も連続的に変化する関係が成立する場合、 x と y との間に「**相関がある**」といいます。

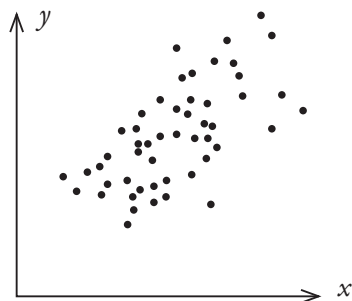
相関係数とは、2つの変数の間に、直線的な関係がどの程度あるかを示す数値で、 r で表されます。 $-1 \leq r \leq 1$ の範囲をとり、 $|r|$ が大きいほど相関関係が強いことを示し、 $|r|$ が小さいほど相関関係が弱いことを示します。

図表5.1 相関係数と相関の強さ

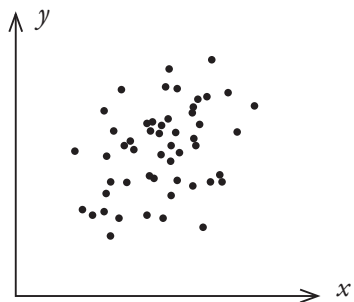
① $r \geq 0.8$: 強い相関がある



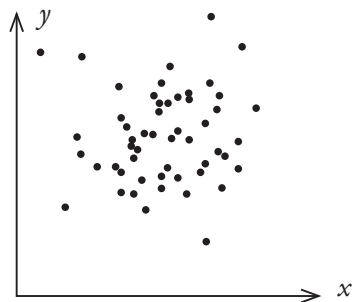
② $0.8 > r \geq 0.6$: 相関がある



③ $0.6 > r \geq 0.4$: 弱い相関がある



④ $r < 0.4$: ほとんど相関はない



n 個のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ において、「 x と y の偏差積和 S_{xy} 」を「 x の偏差平方和の平方根 $\sqrt{S_{xx}}$ と y の偏差平方和の平方根 $\sqrt{S_{yy}}$ の積」で割った値を、 x と y の **相関係数 r** といいます。

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$$

〈例〉 x の平均=5.0、平方和=4.0、 y の平均=6.0、平方和=9.0、 x と y の(偏差)積和=5.0のときの相関係数は、

$$\text{相関係数 } r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{5.0}{\sqrt{4.0 \times 9.0}} = \frac{5.0}{6.0} \doteq 0.83$$

また、相関係数 r を2乗したものを **寄与率 R^2** といいます。寄与率 R^2 は、0 ～ 1 の範囲をとり、**要因変数 x が結果変数 y に及ぼす影響の大きさ**を表します。

相関分析を行うデータにおいて、 x は $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ に従い、 y は $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に従うと考えます。また母集団における x と y の関連度合いを表す母数とし、下式のとおり、母相関係数 ρ を考えます。

$$\rho = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}$$

分子は **共分散** を示し、分母は x と y の **標準偏差** を示します。共分散を x と y の標準偏差で割ることで **標準化** します。

ρ も r と同様、 $-1 \leq \rho \leq 1$ となり、1 に近づくほど母集団として x と y の正の相関が強く、 -1 に近づくほど負の相関が強く、0 に近づくほど相関が弱いことを示します。

※ 個々のデータから平均値を引いた値を偏差といい、 x と y の偏差をかけ合わせた偏差積 $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ の総和を x と y の偏差積和といい、 S_{xy} で表す

1) 母相関係数 ρ に関する t 分布に基づく無相関検定

手順1 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \rho = 0$ (無相関)
- 対立仮説 $H_1: \rho \neq 0$ (相関関係がある)

手順2 有意水準 α の設定

通常は $\alpha = 0.05$ とする。

手順3 統計量等の計算

n 個のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ における相関係数 r を計算する。

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

統計量 t_0 を計算する。

$$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

手順4 検定

$|t_0| \geq t(\phi, \alpha)$ であれば有意となり、 H_0 は棄却される。すなわち H_1 が成立する。

2) グラフによる相関の検定

対になる2つの変数、要因(x)、特性(y)のグラフがある場合は、これを利用して相関の検定を行うことができます。

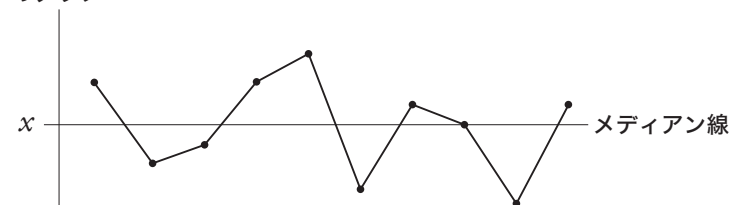
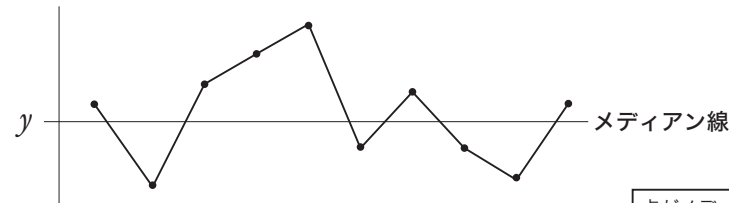
グラフによる相関の検定方法には、 x と y の中央値(メディアン)を利用する**大波の相関**と、前のデータからの増減を利用する**小波の相関**があります。

①大波の相関の検定方法

手順1 中央線(メディアン線)の作成

下図の x と y を対にしたグラフにおいて、点の数を上下に2等分する中央線(メディアン線)を引きます(図表5.2 参照)。

図表5.2 大波の相関

 x のグラフ y のグラフ

x	+	-	-	+	+	-	+	0	-	+
y	+	-	+	+	+	-	+	-	-	+
$x \times y$	+	+	-	+	+	+	+	0	+	+

点がメディアン線の上にある場合は+を、下にある場合はマイナスをつけて、対になる点の符号どうしを掛け合わせる($x \times y$)。

手順2 符号の積の系列の作成等

中央線の上側にある点に+、下側にある点に-を付けて、その符号の積の系列を作ります(図表5.2 下の「 $x \times y$ 」表参照)。次に x と y の積の「+」の数 n_+ と「-」の数 n_- を数えます。中央線上に点があれば0として、これは数えないこととします。この例によると、 $n_+ = 8$ 、 $n_- = 1$ となります。

手順3 判定

符号検定表と比較して判定を行います。符号検定表とは、統計的に相関があるか否かを判定する表です。合計 $N(= n_+ + n_-)$ に該当する行から、判定数 n_s を読み取ります。

明変数 x 、目的変数 y を線(目的変数 y について説明変数 x を使った式)で表すことです。

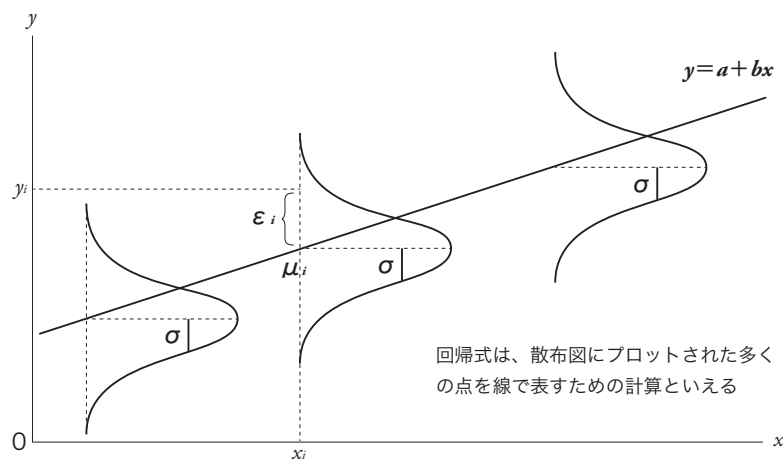
説明変数 x が1つの場合を**単回帰分析**といい、説明変数が2つ以上ある場合を**重回帰分析**といいます。QC検定®2級では、**単回帰分析**が出題対象となっています。

単回帰式は、 $y = a + b x + \varepsilon$ と表されます。 ε : エプシロン
※回帰式に含まれる係数 a 、 b を回帰係数という
(a : 切片、 b : 傾き、 ε : 残差)

単回帰分析では、すべてのデータの残差 ε が小さくなるように、 a と b を算出します。データの数 n がある場合、 i 番目の値を (x_i, y_i) とすると、真の回帰式から得られる値は、 $(x_i, a + b x_i)$ となります。これらを用いると、残差 ε_i は、

$$\varepsilon_i = \text{実際のデータの値} - \text{真の回帰式から得られる値} = y_i - (a + b x_i)$$

と表すことができます。



なお、上図は単回帰モデルと呼ばれ、 y の母平均は直線 $y = a + b x$ 上にあり、 $x = x_i$ と指定すると、母平均 $y_i = a + b x_i$ が定まり、それに正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う残差 ε_i が加わってデータ y_i が得られることになります。

すべてのデータの残差 ε を小さくするために、各データの二乗和を考え、この二乗和が最小となるような a と b を算出します。この方法を**最小二乗法**といいます。

a と b を求めると、

$$a = y \text{ の平均値} - b \times (x \text{ の平均値})$$

$$b = S_{xy} / S_{xx}$$

となります。

上述の回帰式 $y = a + b x + \varepsilon$ を変形して、 $y_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) + \varepsilon$ と表すこともできます。これにより、 x_i における y_i の母平均の推定値 $\hat{\mu}_i$ は以下の式で表されます。

$$\hat{\mu}_i = \bar{y} + b(x_i - \bar{x})$$

実測値は回帰線上にはないことから、総変動 S_T は以下の通り分解されます。

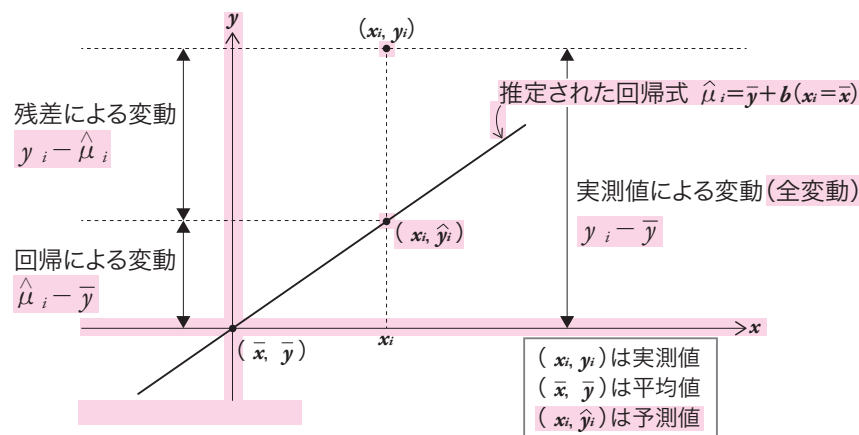
$$S_T = \sum (y_i - \bar{y})^2 \rightarrow \text{実測値の変動を示します。}$$

$$S_R = \sum (\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 \rightarrow \text{回帰による変動を示します。}$$

$$S_e = \sum (y_i - \hat{\mu}_i)^2 \rightarrow \text{残差による変動を示します。}$$

上記の3つの変動において、 $S_T = S_R + S_e$ の関係が成立します。

図表5.5 変動の分解



$$S_R = \sum (\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 = \sum \{ \bar{y} + b(x_i - \bar{x}) - \bar{y} \}^2 = b^2 S_{xx}$$

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \text{ なので、 } S_R = \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$$

$$S_e = S_T - S_R = S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$$

となり、 y の総変動が回帰による変動と残差による変動とに分解されたことを示しています。

残差 ε については、

- 不偏性 ($E(\varepsilon_i) = 0$)
- 等分散性 ($V(\varepsilon_i) = \sigma^2$)
- 独立性 ($Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$)
- 正規性 ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ※正規分布に従う。「 $\sim N(0, \sigma^2)$ 」とは、「 $N(0, \sigma^2)$ に従う」という意味

を満たす必要があります。

2) 分散分析(単回帰分析)の手順

分散分析(単回帰分析)は、説明変数 x と目的変数(実測値) y の関係を、グラフにする際に、直線的な関係が予想される場合に回帰に意味があるかどうかの検定と、検定の結果、意味があった場合に回帰係数の推定を行うものです。

データ表(例)

標本	説明変数 x	目的変数(実測値) y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n

手順1 各平方和の計算

総変動 : $S_T = S_{yy}$

回帰による変動 : $S_R = (S_{xy})^2 / S_{xx}$

残差による変動 : $S_e = S_T - S_R = S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$

手順2 各自由度の計算

全体の自由度 : $\phi_T = \text{総データ数} - 1 = n - 1$

回帰による自由度 : $\phi_R = 1$

残差による自由度 : $\phi_e = n - 2$

手順3 各(不偏)分散 V と分散比 F_0 の計算

$$V_R = \frac{S_R}{\phi_R} = S_R$$

$$V_e = \frac{S_e}{\phi_e} = \frac{S_e}{n-2}$$

$$F_0 = \frac{V_R}{V_e}$$

手順4 分散分析表の作成

手順1～3の結果を下記のような分散分析表にまとめ、検定と推定を行う。

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
回帰	S_R	1	$V_R = S_R$	$F_0 = \frac{V_R}{V_e}$
残差	S_e	$n-2$	$V_e = \frac{S_e}{n-2}$	
計	S_T	$n-1$	—	

手順5 検定

分散比 F_0 と F 表の $F(1, n-2; \alpha)$ を比較します。

$F_0 > F(1, n-2; \alpha)$ であれば、回帰による変動が残差による変動よりも全変動に与える影響が大きいいといえ、回帰曲線は予測に役立つ＝回帰による変動が有意である(意味のあること)と判定します。

手順6 推定

回帰による変動が有意である(意味のあること)と判定した場合、回帰係数の推定を行います。

回帰係数の推定値 a , b ($y = a + bx$) は、

$$b = S_{xy} / S_{xx}$$

$$a = y \text{ の平均値} - b \times (x \text{ の平均値})$$

により求めます。

〈例〉10組のデータにおいて、 x の平均4.0、平方和6.0、 y の平均5.0、平方和7.0、 x と y の偏差積和が6.0のとき、分散分析表を作成して、回帰に意味があるのか否かの検定と、検定の結果、意味があった場合には回帰係数の推定を行う。

手順1 各平方和の計算

総変動 : $S_T = S_{yy} = 7.0$

回帰による変動 : $S_R = (S_{xy})^2 / S_{xx} = (6.0)^2 / 6.0 = 6.0$

残差による変動 : $S_e = S_T - S_R = S_{yy} - (S_{xy})^2 / S_{xx}$
 $= 7.0 - 6.0 = 1.0$

手順2 各自由度の計算

全体の自由度 : $\phi_T = \text{総データ数} - 1 = n - 1 = 10 - 1 = 9$

回帰による自由度 : $\phi_R = 1$

残差による自由度 : $\phi_e = n - 2 = 10 - 2 = 8$

手順3 各(不偏)分散Vと分散比 F_0 の計算

$$V_R = \frac{S_R}{\phi_R} = S_R = 6.0$$

$$V_e = \frac{S_e}{\phi_e} = \frac{S_e}{n-2} = \frac{1.0}{10-2} = \frac{1}{8}$$

$$F_0 = \frac{V_R}{V_e} = \frac{6.0}{1/8} = 48$$

手順4 分散分析表の作成

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
回帰	$S_R = 6.0$	1	$V_R = 6.0$	$F_0 = \frac{V_R}{V_e} = 48$
残差	$S_e = 1.0$	$n - 2 = 8$	$V_e = \frac{1}{8}$	
計	$S_T = 7.0$	$n - 1 = 9$	—	

手順5 検定

分散比 F_0 とF表の $F(1, n-2; \alpha)$ を比較する。

$$F(1, n-2; \alpha) = F(1, 8; 0.05) = 5.32$$

$F_0 = 48 > F(1, 8; 0.05) = 5.32$ となることから、回帰による変動が**有意である**(意味のあること)と判定する。

手順6 推定

回帰による変動が**有意である**(意味のあること)と判定されたので、回帰係数の推定を行う。

回帰係数の推定値 a, b ($y = a + b x$) は、

$$b = S_{xy} / S_{xx} = 6.0 / 6.0 = 1$$

$$a = y \text{の平均値} - b \times (x \text{の平均値}) = 5.0 - 1.0 \times 4.0 = 1$$

よって、 $y = 1 + x$ となる。

なお、単回帰分析では、説明変数 x と目的変数 y に比例関係があり、データ範囲外の領域でも比例関係が継続すると仮定している。

例えば、 $x = 20.0$ を $y = 1 + x$ に代入すると、 $y = 21.0$ となるが、 x および y の平均を大きく外れてしまう。このように、回帰式を導いたデータの範囲外の数値を代入することを「外挿」というが、誤った結果を含んでいる可能性があることから信憑性に問題があるため、できるだけ避けるべきである。

3) 寄与率および残差の検討

回帰分析で得られた回帰式がどの程度の精度であるかを評価する指標として、**寄与率 R^2** があります。

$$R^2 = S_R / S_T$$

回帰による変動(S_R)を総変動(S_T)で割ったもので、総変動における回帰による変動の割合を示し、0から1の間の値をとります。値が大きいほど回帰式に意味があり、値が小さいほど回帰式に意味がないということになります。なお、**相関係数 r の二乗に一致します($R^2 = r^2$)**。

また、**残差**の大きさについても検討する必要があります。残差とは**目的変数(実測値) y の値と回帰式によって予測した y の値との差**を示します。

なお、残差については次の3つを行います。

- 残差が正規分布に従っているかどうかの検討
- 残差と説明変数 x が関係ないかどうかの検討
- 残差の時間的变化に「クセ」があるかどうかの検討

※ 残差は、測定値から推定値を引いた値

練習問題

赤シートで正解を隠して設問に答えてください(解説はP.119から)。

【問1】 ある工程の要因 x と品質特性 y に関する x と y の対のデータを10組抽出した。これにより以下の統計量を得た。

$$\Sigma x = 55, \Sigma y = 47, \Sigma x^2 = 349, \Sigma y^2 = 257, \Sigma xy = 289$$

このとき、内に入る数値を答えよ。

① 要因 x の偏差平方和 $S_{xx} = \text{(1)}$ 、品質特性 y の偏差平方和 $S_{yy} = \text{(2)}$ 、 x と y の偏差積和 $S_{xy} = \text{(3)}$ となる。これにより、 x と y の相関係数 $r = \text{(4)}$ となる。

② x を説明変数、 y を目的変数として、回帰式 $y = a + bx$ を推定すると、
 $y = \text{(5)} + \text{(6)} \times x$ 回帰式の寄与率は (7) となる。

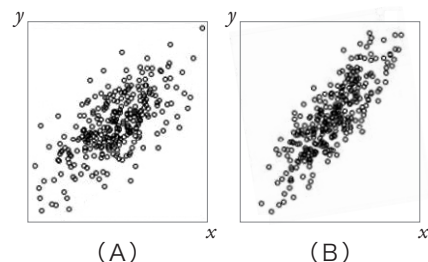
③ ②で推定された回帰式における分散分析表は下表のとおりとなる。

要因	平方和 S	自由度 ϕ	不偏分散 V	分散比 F_0
回帰	$S_R = \text{(8)}$	$\phi_R = 1$	$V_R = \text{(12)}$	$F_0 = \text{(14)}$
残差	$S_e = \text{(9)}$	$\phi_e = \text{(11)}$	$V_e = \text{(13)}$	
計	$S_T = \text{(10)}$	$\phi_T = 9$	—	

正解 (1) 46.5 (2) 36.1 (3) 30.5 (4) 0.74 (5) 1.07
 (6) 0.66 (7) 0.55 (8) 20.0 (9) 16.1 (10) 36.1
 (11) 8 (12) 20.0 (13) 2.01 (14) 9.95

【問2】 次の文章において、内に入るもっとも適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。

右の散布図(A)、(B)において、特性値 x と特性値 y の相関係数 r の絶対値は(A)よりも(B)が。



〈選択肢〉 ア. 大きい イ. 小さい

正解 ア

【問3】 次の文章において、内に入るもっとも適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。ただし、(3)には符号が入る。

ある工程の要因 x と品質特性 y に関する x と y の対のデータを5組抽出した。これにより以下の統計量を得た。

$$\Sigma x = 9, \Sigma y = 20, \Sigma x^2 = 19, \Sigma y^2 = 84, \Sigma xy = 37$$

要因 x と品質特性 y に関する相関係数 r を求めると、 $r = \text{(1)}$ となる。次に t 検定を用いて無相関の検定を行う。 t 値を計算すると、

$$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \text{(2)}$$

となり、 $|t_0| \text{ (3) } t(\phi, \alpha) \text{ (} \phi = n - 2, n = 5 \text{)}$ であることから、相関関係が (4) といえる。

〈選択肢〉

ア. 0.299 イ. 0.543 ウ. 0.602 エ. 1.305 オ. 1.746
 カ. > キ. < ク. = ケ. ある コ. ない

正解 (1) ア (2) イ (3) キ (4) コ

解答・解説

【問1】 (問1～3 相関分析、単回帰分析)

(1) 46.5 (2) 36.1 (3) 30.5 (4) 0.74 (5) 1.07
 (6) 0.66 (7) 0.55 (8) 20.0 (9) 16.1 (10) 36.1
 (11) 8 (12) 20.0 (13) 2.01 (14) 9.95

$$S_{xx} = 349 - \frac{55^2}{10} = 46.5, S_{yy} = 257 - \frac{47^2}{10} = 36.1, S_{xy} = 289 - \frac{55 \times 47}{10} = 30.5,$$

$$r = \frac{30.5}{\sqrt{46.5 \times 36.1}} \doteq 0.74$$

②については、①で求めた偏差積和を用いて、 a 、 b をそれぞれ求める。寄与率は相関係数 r を2乗して求める。

【問2】 ア 散布図(A)よりも(B)のほうが傾きが大きく、直線に近いので、相関係数が高いことは視覚的にわかる。

【問3】 (1) ア (2) イ (3) キ (4) コ 計算式はP.120参照。
 $t(\phi, \alpha) = t(3, 0.05) = 3.182$

計算式の確認

	計算式
偏差平方和 S	$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$ $S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$ $S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$
相関係数 r	$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$
寄与率 $R^2 (= r^2)$	相関係数 r を 2 乗する $R^2 (= r^2) = \left(\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \right)^2 = \frac{S_R}{S_{yy}} = \frac{S_R}{S_T}$
統計量 t_0	$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$
単回帰式 $y = a + b x + \varepsilon$ における a : 切片、 b : 傾き (回帰係数)	$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ $a = y \text{ の平均値} - b \times (x \text{ の平均値})$
総平方和	$S_T = S_{yy}$
回帰平方和	$S_R = \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$
残差平方和	$S_e = S_T - S_R = S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$
自由度 ϕ	全体の自由度 : $\phi_T = \text{総データ数} - 1 = n - 1$ 回帰による自由度 : $\phi_R = 1$ (= 回帰式の説明変数の数) 残差による自由度 : $\phi_e = n - 2$
平均平方 V ※	回帰の平均平方 : $V_R = \frac{S_R}{\phi_R} = S_R$ 残差の平均平方 : $V_e = \frac{S_e}{\phi_e} = \frac{S_e}{n-2}$
分散比	$F_0 = \frac{V_R}{V_e}$

※(不偏)分散と平均平方は同義であるが、過去問の出題実績に則り、第1章(データの取り方とまとめ方)では「(不偏)分散」と表記し、第5章(単回帰分析)においては「平均平方」と表記する

I 手法編

第6章 実験計画法

合格のポイント

- ➡ 取得したデータからの分散分析表の作成、最適条件を決定する計算方法、および F 表の確認の理解
- ➡ 一元、二元配置実験の違い、二元配置実験におけるプーリング前後のデータの構造式と分散分析表から最適組合せの推定までの手順の理解

1 実験計画法の概要

実験計画法とは、効率的で客観的な結論が得られるように、実験を計画する方法です。具体的には、**目標とする特性値に対して影響のありそうな因子をいくつか取り上げて、その主効果や交互作用効果を検定および推定するための統計的方法**です。少ない実験回数で重要な情報を得るために、実験の計画(実験配置)と実験データの解析(分散分析)を行います。

イギリスの統計学者のロナルド・エイルマー・フィッシャーがこの実験計画法を確立させました。

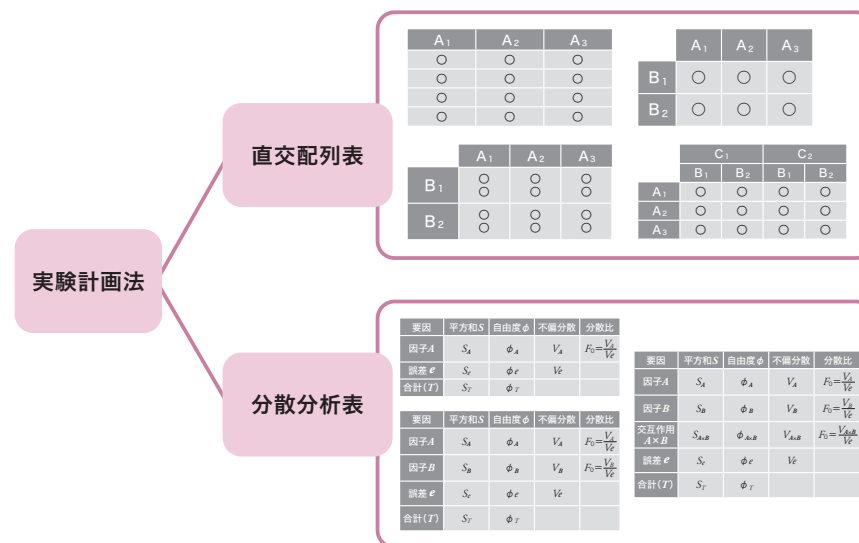
端的にいうと、実験で得られたデータの変化・特徴が、「要因によるものなのか?」「誤差によるものなのか?」を見分ける方法といえます。

図表6.1 実験計画法で見るもの

要因	● 実験結果に影響を及ぼす可能性のあるもの(誤差等を含む)
因子	● 実験の目的のために取り上げた要因
水準	● 因子を量的または質的に変化させた段階で、とくに代表値として選んだ値 ● 水準内のばらつきを群内変動、水準間のばらつきを群間変動という
効果	● 応答の平均に対する因子の影響 ● (単一因子による)主効果や(ある因子の効果が他の因子の水準に依存する)交互作用がある

実験計画法の確立当時は、計算機が未発達で、全て手計算で行うしかなかったため、重宝されましたが、現在では計算機の発達により、実務で実験計画法が用いられることはほとんどないようです。

実験計画法は、直交配列表と分散分析表の2つの項目で構成されます。



実験の精度を高めるために、**フィッシャーの3原則**を用います(図表6.2参照)。

図表6.2 フィッシャーの3原則の概要

反復の原則 ● 同じ条件の実験を繰り返す。 ● 実験で繰り返すことで、データ数が増大し、誤差分散が小さくなる。 ● 系統誤差^{※1}と偶然誤差^{※2}を判断できる。	無作為化の原則 ● ランダムに行う。 ● 誤差要因を一定にすることで、誤差の一定性を確保する(系統誤差を偶然誤差に転化する)。	局所管理の原則 ● できるだけ同じ対象を用いて行う。 ● 得たい要因以外の要因が全て均一となる。 ● 系統誤差を小さくできる。
---	---	--

※1 系統誤差：処理の違いによる差

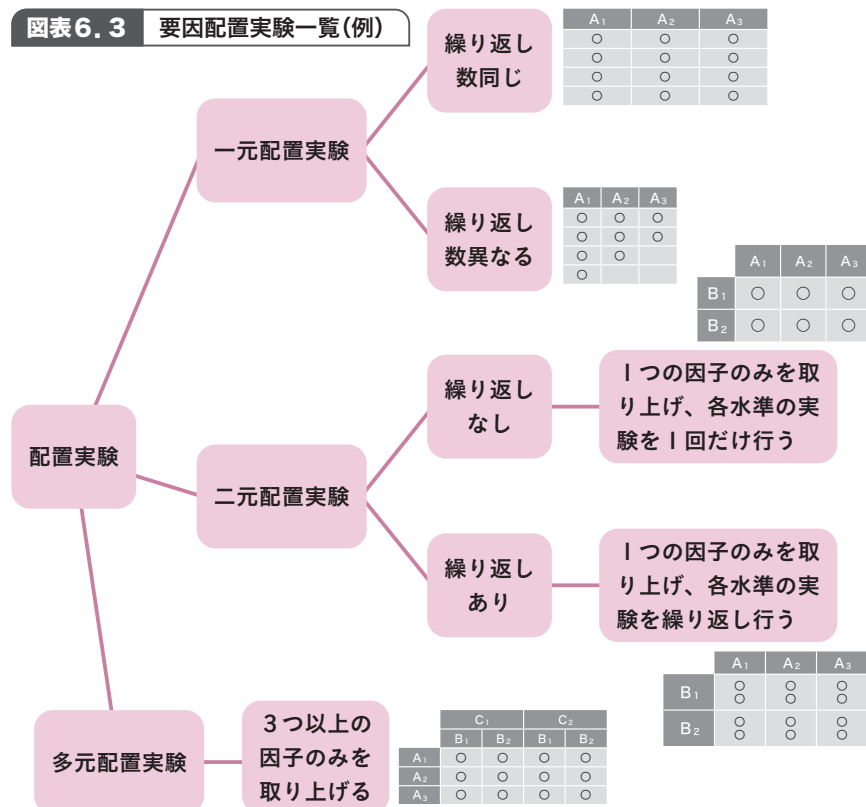
※2 偶然誤差：たまたま生じる誤差

2 要因配置実験

1) 種類

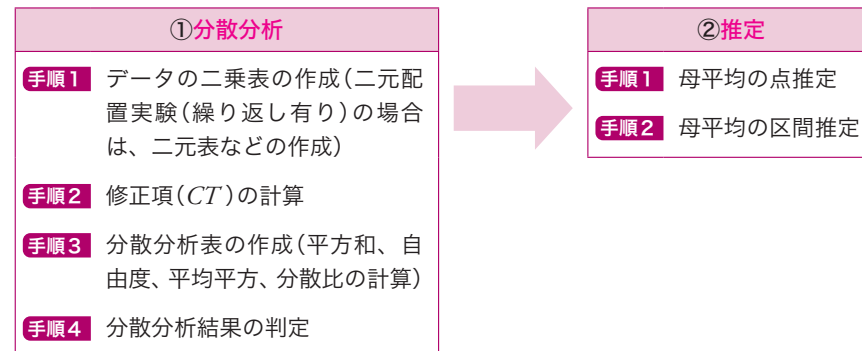
要因配置実験は、配置実験法ともいわれ、図表 6.3 のように分類されます。QC 検定[®] 2 級では、**一元配置実験**および**二元配置実験**(繰返しなし、繰返しあり)が試験範囲となります。問題文を読んで、どのパターンに該当するかを適切に判断することが重要です。

図表 6.3 要因配置実験一覧(例)



要因配置実験の手順(一例)は、図表 6.4 のとおりです。

図表 6.4 要因配置実験の手順(一例)



データの構造式

	構造式
一元配置実験	$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$
二元配置実験 (繰返しなし)	$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$
二元配置実験 (繰返しあり)	$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}^{**}$

データ $x_{ij(k)}$ は、平均 μ 、主効果 α_i と β_j 、交互作用 $(\alpha\beta)_{ij}$ 、誤差 $\varepsilon_{ij(k)}$ の一次式で表されます。

主効果とは因子単独の効果、交互作用とは複数の因子の組み合わせによる効果、誤差とはデータから各効果を取り除いた残り物のことです。

2) 分散分析表の考え方

実験にあたり、目的とする特性値に影響を与える変動要因の中から、その実験に取り上げた要因を**因子**といい、その要因を質的、量的に変動させる条件を**水準**といいます。

データのばらつきには、一般的に、

- 因子の水準を変えたために生じるばらつき
- 実験を繰返したときに生じるばらつき

が混在しています。

^{**} 下付きの記号 ijk は、それぞれ i : A の第 i 水準、 j : B の第 j 水準、 k : k 回目(繰返しがある場合)を表している。P.126、129、132、136 のデータ構造式参照

実験全体のデータが持っているばらつきを**総変動**といい、**総変動**は群間変動と群内移動に分類することができます。

- 群間変動(級間平方和) S_A : 水準による応答の平均のばらつき
- 群内変動(誤差平方和) S_e : 水準を一定に保った場合の、個々のデータのばらつき

3) 一元配置実験(繰り返しの数が同じ)

因子を一つ選び、数通りの水準を設定し、各水準においてランダムに繰り返しの実験を行います。

水準数3、実験の**繰り返し**数3とすると、 A_i における j 個目のデータ x_{ij} は、次の構造式で観測されると考え、データ表は以下のとおりとなります。

データ = 総平均 + 処理の効果 + 誤差

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

データ表

繰り返し \ 水準	A_1	A_2	A_3
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}

要因	平方和 S	自由度 ϕ	平均平方 V	分散比 F_0
因子 A	$S_A = \sum \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT$	$\phi_A = \text{水準数} - 1$	$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$	$F_0 = \frac{V_A}{V_e}$
誤差 e	$S_e = S_T - S_A$	$\phi_e = \phi_T - \phi_A$	$V_e = \frac{S_e}{\phi_e}$	
合計	$S_T = \sum (\text{データの二乗}) - CT$	$\phi_T = \text{総データ数} - 1$		

$$CT(\text{修正項}) = (\text{データの合計})^2 / \text{データ数}$$

〈例〉因子 A を3水準設定し、3回の実験を行ったときの分散分析と推定データ表

A_1	A_2	A_3
5	5	9
6	4	7
7	6	8

① 分散分析

手順1 データの合計表およびデータの二乗表の作成

データの合計表

繰り返し \ 水準	A_1	A_2	A_3	総計
1	5	5	9	19
2	6	4	7	17
3	7	6	8	21
合計	18	15	24	57

データの二乗表

繰り返し \ 水準	A_1	A_2	A_3	総計
1	25	25	81	131
2	36	16	49	101
3	49	36	64	149
合計	110	77	194	381

手順2 修正項(CT)の計算

$$\text{データの合計} = 5 + 6 + 7 + 5 + 4 + 6 + 9 + 7 + 8 = 57$$

$$CT = (\text{データの合計})^2 / \text{データ数} = \frac{57^2}{9} = 361$$

手順3 分散分析表の作成(平方和、自由度、平均平方、分散比の計算)

まず、各平方和を計算する。

$$S_T = \sum (\text{データの二乗}) - CT = 381 - 361 = 20$$

$$S_A = \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT$$

$$= \frac{18^2}{3} + \frac{15^2}{3} + \frac{24^2}{3} - 361 = 375 - 361 = 14$$

$$S_e = S_T - S_A = 20 - 14 = 6$$

次に、各自由度を計算する。

$$\phi_T = \text{総データ数} - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\phi_A = \text{水準数} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\phi_e = \phi_T - \phi_A = 8 - 2 = 6$$

続いて、平均平方と分散比を計算する。

$$V_A = S_A / \phi_A = 14 / 2 = 7$$

$$V_e = S_e / \phi_e = 6 / 6 = 1$$

これにより、分散比は、 $F_0 = V_A / V_e = 7 / 1 = 7$

よって、分散分析表は下表のとおりとなる。

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
因子A	14	2	7	7
誤差e	6	6	1	
合計	20	8		

手順4 分散分析結果の判定

手順3で得た分散比 $F_0 = 7$ とF表の $F(\phi_A, \phi_e; \alpha) = F(2, 6; 0.05) = 5.14$ を比較すると、 $F_0 > F(2, 6; 0.05)$ となるので、**有意な差がある**と判定できる。

②推定

手順1 点推定

①分散分析の結果、因子Aは有意となったので、各水準の母平均 μ を信頼度95%で推定する。母平均＝各水準の平均値であることから、

$$A_1 \text{水準の母平均} = 18 / 3 = 6$$

$$A_2 \text{水準の母平均} = 15 / 3 = 5$$

$$A_3 \text{水準の母平均} = 24 / 3 = 8$$

手順2 区間推定

各水準の母平均 μ の信頼区間幅を信頼度95%で表すと以下の式となる。

$$\widehat{\mu}_{Ai} - t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}} < \mu_{Ai} < \widehat{\mu}_{Ai} + t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}}$$

($\widehat{\mu}_{Ai}$ は点推定を示す。 n :各水準の繰り返し数)

$t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e/n}$ において、 $n = 3$ と①手順3で得た、 $\phi_e = 6$ 、 $V_e = 1$ を代入すると、 $t(6, 0.05) \sqrt{1/3} \approx 2.447 \times 0.58 \approx 1.42$ となる。

$$6 - 1.42 < \mu_{A1} < 6 + 1.42 \rightarrow 4.58 < \mu_{A1} < 7.42$$

$$5 - 1.42 < \mu_{A2} < 5 + 1.42 \rightarrow 3.58 < \mu_{A2} < 6.42$$

$$8 - 1.42 < \mu_{A3} < 8 + 1.42 \rightarrow 6.58 < \mu_{A3} < 9.42$$

4) 一元配置実験(繰り返しの数が異なる)

一元配置実験において繰り返しの数が異なる場合を考えてみます。基本的には繰り返しの数が同じ場合と同様の手順となります。

水準数3、実験の繰り返し数3とすると、 A_i における j 個目のデータ x_{ij} は、次の構造式で観測され则认为、データ表は以下のとおりとなります。

データ＝総平均＋処理の効果＋誤差

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

データ表

繰り返し \ 水準	A ₁	A ₂	A ₃
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}
3	x_{13}	x_{23}	

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
因子A	$S_A = \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT$	$\phi_A = \text{水準数} - 1$	$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$	$F_0 = \frac{V_A}{V_e}$
誤差e	$S_e = S_T - S_A$	$\phi_e = \phi_T - \phi_A$	$V_e = \frac{S_e}{\phi_e}$	
合計	$S_T = \Sigma (\text{データの二乗}) - CT$	$\phi_T = \text{総データ数} - 1$		

$$CT(\text{修正項}) = (\text{データの合計})^2 / \text{データ数}$$

〈例〉因子 A を 3 水準設定し、3 回の実験を行ったときの分散分析と推定

データ表

A_1	A_2	A_3
5	5	9
6	4	8
7	6	

①分散分析

手順1 データの合計表およびデータの二乗表の作成

データの合計表

水準 繰り返し	A_1	A_2	A_3	総計
1	5	5	9	19
2	6	4	8	18
3	7	6		13
合計	18	15	17	50

データの二乗表

水準 繰り返し	A_1	A_2	A_3	総計
1	25	25	81	131
2	36	16	64	116
3	49	36		85
合計	110	77	145	332

手順2 修正項 (CT) の計算

$$\text{データの合計} = 5 + 6 + 7 + 5 + 4 + 6 + 9 + 8 = 50$$

$$CT = (\text{データの合計数})^2 / \text{データ数} = 50^2 / 8 = 312.5$$

手順3 分散分析表の作成 (平方和、自由度、平均平方、分散比の計算)

まず、各平方和を計算する。

$$S_T = \Sigma (\text{データの二乗}) - CT = 332 - 312.5 = 19.5$$

$$S_A = \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT$$

$$= \frac{18^2}{3} + \frac{15^2}{3} + \frac{17^2}{2} - 312.5 = 327.5 - 312.5 = 15$$

$$S_e = S_T - S_A = 19.5 - 15 = 4.5$$

次に、各自由度を計算する。

$$\phi_T = \text{総データ数} - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$\phi_A = \text{水準数} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\phi_e = \phi_T - \phi_A = 7 - 2 = 5$$

続いて、平均平方と分散比を計算する。

$$V_A = S_A / \phi_A = 15 / 2 = 7.5$$

$$V_e = S_e / \phi_e = 4.5 / 5 = 0.9$$

これにより、分散比は、 $F_0 = V_A / V_e = 7.5 / 0.9 \approx 8.33$

よって、分散分析表は下表のとおりとなる。

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
因子 A	15	2	7.5	8.33
誤差 e	4.5	5	0.9	
合計	19.5	7		

手順4 分散分析結果の判定

手順3で得た分散比 $F_0 = 8.33$ と F 表の $F(\phi_A, \phi_e; \alpha) = F(2, 5; 0.05) = 5.79$ を比較すると、 $F_0 > F(2, 5; 0.05)$ となるので、**有意な差がある** と判定できる。**有意水準を $\alpha (=0.05)$ とする。**

②推定

手順1 点推定

①分散分析の結果、因子 A は有意となったので、各水準の母平均 μ を信頼度 95% で推定する。母平均 = 各水準の平均値であることから、

$$A_1 \text{水準の母平均} = 18 / 3 = 6$$

$$A_2 \text{水準の母平均} = 15 / 3 = 5$$

$$A_3 \text{水準の母平均} = 17 / 2 = 8.5 \quad \text{※各水準の合計を繰り返し数で割る}$$

手順2 区間推定

各水準の母平均 μ の信頼区間幅を信頼度95%で表すと以下の式となる。

$$\widehat{\mu}_{Ai} - t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n_i}} < \mu_{Ai} < \widehat{\mu}_{Ai} + t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n_i}}$$

($\widehat{\mu}_{Ai}$ は点推定を示す。 n_i :各水準の繰り返し数)

$t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e/n_i}$ において、 $n_i = 3$ と①手順3で得た、 $\phi_e = 5$ 、 $V_e = 0.9$ を代入すると、 $t(5, 0.05) \sqrt{0.9/3} \doteq 2.571 \times 0.55 \doteq 1.41$ となる。

水準 A_1 、 A_2 において、

$$6 - 1.41 < \mu_{A1} < 6 + 1.41 \rightarrow 4.59 < \mu_{A1} < 7.41$$

$$5 - 1.41 < \mu_{A2} < 5 + 1.41 \rightarrow 3.59 < \mu_{A2} < 6.41$$

水準 A_3 において、 $n = 2$ と①手順3で得た $\phi_e = 5$ 、 $V_e = 0.9$ を代入すると、

$$t(5, 0.05) \sqrt{0.9/2} \doteq 2.571 \times 0.671 \doteq 1.72 \text{ となる。}$$

$$8.5 - 1.72 < \mu_{A3} < 8.5 + 1.72 \rightarrow 6.78 < \mu_{A3} < 10.22$$

5) 二元配置実験(繰り返しなし)

2つの因子 A 、 B について、それぞれ a 個の水準、 b 個の水準を選び、全部で $a \times b$ 個の組み合わせの実験をランダムに行います。

水準数 $a = 4$ 、 $b = 3$ とすると、 A_i の第 i 水準、 B_j の第 j 水準を組み合わせた水準の下で行った実験のデータ x_{ij} は、次の構造式で観測され则认为、データ表は以下のとおりとなります。

データ=総平均+処理の効果+誤差

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

データ表

因子A \ 因子B	B_1	B_2	B_3
A_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}
A_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}
A_3	x_{13}	x_{23}	x_{33}
A_4	x_{14}	x_{24}	x_{34}

2つの因子 A 、 B の各水準を組み合わせた条件ごとに、1回ずつの実験を行ってデータをとる場合、原則としてランダムな順序で実験を行います。

この実験で得られたデータを分散分析するには、総変動を要因変動(因子 A による変動、因子 B による変動)に分離して、各変動の大きさを比較することになります。

要因	平方和 S	自由度 ϕ	平均平方 V	分散比 F_0
因子 A	$S_A = \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT$	$\phi_A = \text{水準数} - 1$	$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$	$F_0 = \frac{V_A}{V_e}$
因子 B	$S_B = \Sigma \frac{(B_j \text{のデータの合計})^2}{B_j \text{のデータ数}} - CT$	$\phi_B = \text{水準数} - 1$	$V_B = \frac{S_B}{\phi_B}$	$F_0 = \frac{V_B}{V_e}$
誤差 e	$S_e = S_T - S_A - S_B$	$\phi_e = \phi_T - \phi_A - \phi_B$	$V_e = \frac{S_e}{\phi_e}$	
合計	$S_T = \Sigma (\text{データの二乗}) - CT$	$\phi_T = \text{総データ数} - 1$		

データ表(因子 A を2水準、因子 B を4水準の実験)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	10	14	8
A_2	4	8	9	5

①分散分析

手順1 データの合計表およびデータの二乗表の作成

データの合計表

因子A \ 因子B	B_1	B_2	B_3	B_4	総計
A_1	6	10	14	8	38
A_2	4	8	9	5	26
合計	10	18	23	13	64

データの二乗表

因子A \ 因子B	B_1	B_2	B_3	B_4	総計
A_1	36	100	196	64	396
A_2	16	64	81	25	186
合計	52	164	277	89	582

手順2 修正項(CT)の計算

$$\text{データの合計} = 6 + 4 + 10 + 8 + 14 + 9 + 8 + 5 = 64$$

$$CT = (\text{データの合計})^2 / \text{データ数} = 64^2 / 8 = 512$$

手順3 分散分析表の作成(平方和、自由度、平均平方、分散比の計算)

まず、各平方和を計算します。

$$S_T = \Sigma (\text{データの二乗}) - CT = 582 - 512 = 70$$

$$\begin{aligned} S_A &= \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT \\ &= \frac{38^2 + 26^2}{4} - 512 = \frac{2120}{4} - 512 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B &= \Sigma \frac{(B_j \text{のデータの合計})^2}{B_j \text{のデータ数}} - CT \\ &= \frac{10^2 + 18^2 + 23^2 + 13^2}{2} - 512 = \frac{1122}{2} - 512 = 49 \end{aligned}$$

$$S_e = S_T - S_A - S_B = 70 - 18 - 49 = 3$$

次に、各自由度を計算します。

$$\phi_T = \text{総データ数} - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$\phi_A = \text{水準数} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\phi_B = \text{水準数} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\phi_e = \phi_T - \phi_A - \phi_B = 7 - 1 - 3 = 3$$

続いて、平均平方と分散比を計算します。

$$V_A = S_A / \phi_A = 18 / 1 = 18$$

$$V_B = S_B / \phi_B = 49 / 3 \doteq 16.3$$

$$V_e = S_e / \phi_e = 3 / 3 = 1$$

これにより、分散比は、

$$A: F_0 = V_A / V_e = 18 / 1 = 18$$

$$B: F_0 = V_B / V_e = 16.3 / 1 = 16.3$$

よって、分散分析表は下表のとおりとなります。

要因	平方和	自由度	平均平方	分散比
因子A	18	1	18	18
因子B	49	3	16.3	16.3
誤差e	3	3	1	
合計	70	7		

手順4 分散分析結果の判定

手順3で得た分散比 $A: F_0 = 18$ 、 $B: F_0 = 16.3$ と F 表の $F(\phi_A, \phi_e; \alpha) = F(1, 3; 0.05) = 10.1$ 、 $F(\phi_B, \phi_e; \alpha) = F(3, 3; 0.05) = 9.28$ を比較すると、

$$A: F_0 = 18 > F(1, 3; 0.05) = 10.1$$

$$B: F_0 = 16.3 > F(3, 3; 0.05) = 9.28$$

となるので、**有意な差がある**と判定できます。

②推定**手順1 最適な組み合わせ条件の選定**

特性値が大きい方がよいので、データの合計表において最大値となる $A_1 B_3$ を選定します。

手順2 点推定

①分散分析の結果、因子Aは有意となったので、各水準の母平均 μ を信頼度95%で推定します。母平均=各水準の平均値であることから、

$$A_1 \text{水準の母平均} = 38 / 4 = 9.5 \quad A_2 \text{水準の母平均} = 26 / 4 = 6.5$$

$$B_1 \text{水準の母平均} = 10 / 2 = 5 \quad B_2 \text{水準の母平均} = 18 / 2 = 9$$

$$B_3 \text{水準の母平均} = 23 / 2 = 11.5 \quad B_4 \text{水準の母平均} = 13 / 2 = 6.5$$

手順3 区間推定

各水準の母平均 μ の信頼区間幅を信頼度95%で表すと以下の式となります。

$$\widehat{\mu}_{Ai} - t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n_i}} < \mu_{Ai} < \widehat{\mu}_{Ai} + t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n_i}}$$

$$\widehat{\mu}_{Bj} - t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n_j}} < \mu_{Bj} < \widehat{\mu}_{Bj} + t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n_j}}$$

($\widehat{\mu}_{Ai}$ 、 $\widehat{\mu}_{Bj}$ は点推定を示す。 n_i 、 n_j : 各水準の繰り返し数)

Aの場合、 $(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e / n_i}$ において、①分散分析の手順3で得た、 $\phi_e = 3$ 、 $V_e = 1$ 、 $n_i = 4$ を代入すると、

$$t(3, 0.05) \sqrt{\frac{1}{4}} \doteq 3.182 \times 0.5 \doteq 1.591 \quad \text{となる。}$$

Bの場合、 $(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e / n_j}$ において、①分散分析の手順3で得た、 $\phi_e = 3$ 、 $V_e = 1$ 、 $n_j = 2$ を代入すると、

$$t(3, 0.05) \sqrt{\frac{1}{2}} = 3.182 \times 0.707 = 2.107 \quad \text{となる。}$$

- A_1 水準の母平均の区間推定
 $9.5 - 1.591 < \mu_{A_1} < 9.5 + 1.591$ $7.909 < \mu_{A_1} < 11.091$
- A_2 水準の母平均の区間推定
 $6.5 - 1.591 < \mu_{A_2} < 6.5 + 1.591$ $4.909 < \mu_{A_2} < 8.091$
- B_1 水準の母平均の区間推定
 $5 - 2.170 < \mu_{B_1} < 5 + 2.170$ $2.830 < \mu_{B_1} < 7.170$
- B_2 水準の母平均の区間推定
 $9 - 2.170 < \mu_{B_2} < 9 + 2.170$ $6.830 < \mu_{B_2} < 11.170$
- B_3 水準の母平均の区間推定
 $11.5 - 2.170 < \mu_{B_3} < 11.5 + 2.170$ $9.330 < \mu_{B_3} < 13.670$
- B_4 水準の母平均の区間推定
 $6.5 - 2.170 < \mu_{B_4} < 6.5 + 2.170$ $4.330 < \mu_{B_4} < 8.670$

手順4 最適条件での母平均の推定

母平均 μ の点推定を以下の式から求めます。 $\widehat{\mu_{A_1 B_3}} = A_1$ 水準の平均値 + B_3 水準の平均値 - 総平均値 = $9.5 + 11.5 - 8 = 13.0$

母平均 μ の区間推定(信頼度95%)

母平均の区間推定 $\widehat{\mu_{A_1 B_3}}$ を以下の式から求めます。

$$\widehat{\mu_{A_1 B_3}} - t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e / n_e} \leq \mu_{A_1 B_3} \leq \widehat{\mu_{A_1 B_3}} + t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e / n_e}$$

n_e は「有効反復係数」で、次の式で求められます。

有効反復係数 $n_e = ab / (1 + \phi_A + \phi_B)$ (田口の公式)

(a : A の水準数、 b : B の水準数)

(有効反復係数と田口の公式についてはP.142参照)

n_e を計算すると、 $n_e = ab / (1 + \phi_A + \phi_B) = 2 \times 4 / (1 + 1 + 3) = 1.6$

$t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e / n_e}$ を計算します。 $t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e / n_e} = t(3, 0.05) \times$

$\sqrt{1/1.6} \approx 3.182 \times 0.791 \approx 2.52$ $13.0 - 2.52 \leq \mu_{A_1 B_3} \leq 13.0 + 2.52$

$10.48 \leq \mu_{A_1 B_3} \leq 15.52$

6) 二元配置実験(繰り返しあり)

2つの因子 A 、 B について、それぞれ a 個の水準、 b 個の水準を選び、全部で $a \times b$ 個の組み合わせの実験をランダムに繰り返して行います。

水準数 $a = 4$ 、 $b = 3$ 、繰り返し数2回とすると、 A_i の第 i 水準、 B_j の第 j 水準を組み合わせた水準の下で行った実験のデータ x_{ijk} は、次の構造式で観測されると考え、データ表は以下のとおりとなります。

データ = 総平均 + 処理の効果 + 交互作用 + 誤差

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

繰り返しのある場合は、要因 A 、 B の主効果だけでなく、交互作用も調べることができます。

データ表

	B_1	B_2	B_3
A_1	x_{111}	x_{211}	x_{311}
	x_{112}	x_{212}	x_{312}
A_2	x_{121}	x_{221}	x_{321}
	x_{122}	x_{222}	x_{322}
A_3	x_{131}	x_{231}	x_{331}
	x_{132}	x_{232}	x_{332}
A_4	x_{141}	x_{241}	x_{341}
	x_{142}	x_{242}	x_{342}

要因	平方和 S	自由度 ϕ	平均平方 V	分散比 F_0
因子 A	$S_A = \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT$	$\phi_A = \text{水準数} - 1$	$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$	$F_0 = \frac{V_A}{V_e}$
因子 B	$S_B = \Sigma \frac{(B_j \text{のデータの合計})^2}{B_j \text{のデータ数}} - CT$	$\phi_B = \text{水準数} - 1$	$V_B = \frac{S_B}{\phi_B}$	$F_0 = \frac{V_B}{V_e}$
交互作用 $A \times B$	$S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B$ $S_{AB} = \Sigma \frac{(AB \text{二元表の各数値})^2}{\text{繰り返し数}} - CT$	$\phi_{A \times B} = \phi_A \times \phi_B$	$V_{A \times B} = \frac{S_{A \times B}}{\phi_{A \times B}}$	$F_0 = \frac{V_{A \times B}}{V_e}$
誤差 e	$S_e = S_T - S_A - S_B - S_{A \times B}$	$\phi_e = \phi_T - \phi_A - \phi_B - \phi_{A \times B}$	$V_e = \frac{S_e}{\phi_e}$	
合計	$S_T = \Sigma (\text{データの二乗}) - CT$	$\phi_T = \text{総データ数} - 1$		

変動の分解

総変動 (総平方和)	因子 A による変動	A 因子の級間平方和 S_A
	因子 B による変動	B 因子の級間平方和 S_B
	交互作用 $A \times B$ による変動	交互作用 $A \times B$ の平方和 $S_{A \times B}$
	級内変動	誤差平方和 S_e

データ表(因子Aを4水準、因子Bを3水準の実験)

	B_1	B_2	B_3
A_1	9	10	9
	9	10	8
A_2	9	11	7
	8	10	6
A_3	8	11	9
	6	12	10
A_4	5	9	8
	7	9	9

①分散分析

手順1 データの二乗表、二元表、二元表の二乗表の作成

データの二乗表

	B_1	B_2	B_3	総計
A_1	81	100	81	262
	81	100	64	245
A_2	81	121	49	251
	64	100	36	200
A_3	64	121	81	266
	36	144	100	280
A_4	25	81	64	170
	49	81	81	211
合計	481	848	556	1885

データの二元表

因子A \ 因子B	B_1	B_2	B_3	総計
A_1	18	20	17	55
A_2	17	21	13	51
A_3	14	23	19	56
A_4	12	18	17	47
合計	61	82	66	209

※データ表の同じ枠内の数値を足し合わせた表(A_1B_1 は $9+9=18$)

データの二元表の二乗表

因子A \ 因子B	B_1	B_2	B_3	総計
A_1	324	400	289	1013
A_2	289	441	169	899
A_3	196	529	361	1086
A_4	144	324	289	757
合計	953	1694	1108	3755

手順2 修正項(CT)の計算

$$CT = (\text{データの合計})^2 / \text{データ数} = 209^2 / 24 \div 1820.04$$

手順3 分散分析表の作成(平方和、自由度、平均平方、分散比の計算)

まず、各平方和を計算します。

$$S_T = \Sigma (\text{データの二乗}) - CT = 1885 - 1820.04 = 64.96$$

$$S_A = \Sigma \frac{(A_i \text{のデータの合計})^2}{A_i \text{のデータ数}} - CT = \frac{55^2 + 51^2 + 56^2 + 47^2}{6 (= 3 \times 2)} - 1820.04$$

$$= 1828.5 - 1820.04 = 8.46$$

$$S_B = \Sigma \frac{(B_j \text{のデータの合計})^2}{B_j \text{のデータ数}} - CT = \frac{61^2 + 82^2 + 66^2}{8 (= 4 \times 2)} - 1820.04$$

$$\div 1850.13 - 1820.04 = 30.09$$

$$S_{AB} = \Sigma \frac{(AB \text{二元表の各数値})^2}{\text{繰り返し数}} - CT$$

$$= \frac{18^2 + 17^2 + 14^2 + 12^2 + 20^2 + 21^2 + 23^2 + 18^2 + 17^2 + 13^2 + 19^2 + 17^2}{2} - 1820.04$$

$$= \frac{3755}{2} - 1820.04 = 1877.5 - 1820.04 = 57.46$$

$$S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B = 57.46 - 8.46 - 30.09 = 18.91$$

$$S_e = S_T - S_A - S_B - S_{A \times B} = 64.96 - 8.46 - 30.09 - 18.91 = 7.50$$

次に、各自由度を計算します。

$$\phi_T = \text{総データ数} - 1 = 24 - 1 = 23$$

$$\phi_A = \text{水準数} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\phi_B = \text{水準数} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\phi_{A \times B} = \phi_A \times \phi_B = 3 \times 2 = 6$$

$$\phi_e = \phi_T - \phi_A - \phi_B - \phi_{A \times B} = 23 - 3 - 2 - 6 = 12$$

続いて、平均平方と分散比を計算します。

$$V_A = S_A / \phi_A = 8.46 / 3 = \mathbf{2.82}$$

$$V_B = S_B / \phi_B = 30.09 / 2 = \mathbf{15.05}$$

$$V_{A \times B} = S_{A \times B} / \phi_{A \times B} = 18.91 / 6 = \mathbf{3.15}$$

$$V_e = S_e / \phi_e = 7.50 / 12 = \mathbf{0.63}$$

これにより、分散比は、

$$A : F_0 = V_A / V_e = 2.82 / 0.63 = \mathbf{4.48}$$

$$B : F_0 = V_B / V_e = 15.05 / 0.63 = \mathbf{23.89}$$

$$A \times B : F_0 = V_{A \times B} / V_e = 3.15 / 0.63 = \mathbf{5.00}$$

よって、分散分析表は次の表のとおりとなります。

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
因子A	8.46	3	2.82	4.48
因子B	30.09	2	15.05	23.89
交互作用 $A \times B$	18.91	6	3.15	5.00
誤差 e	7.50	12	0.63	
合計	64.96	23		

手順4 分散分析結果の判定

手順3で得た分散比 $A : F_0 = 4.48$ 、 $B : F_0 = 23.89$ 、 $A \times B : F_0 = 5.00$ とF表の $F(\phi_A, \phi_e; \alpha) = F(3, 12; 0.05) = 3.49$ 、 $F(\phi_B, \phi_e; \alpha) = F(2, 12; 0.05) = 3.89$ 、 $F(\phi_{A \times B}, \phi_e; \alpha) = F(6, 12; 0.05) = 3.00$ を比較すると、

$$A : F_0 = 4.48 > F(3, 12; 0.05) = 3.49$$

$$B : F_0 = 23.89 > F(2, 12; 0.05) = 3.89$$

$$A \times B : F_0 = 5.00 > F(6, 12; 0.05) = 3.00$$

となるので、**有意な差がある**と判定できます。

判定には3つのパターンがあります。

①交互作用 $A \times B$ が有意でなく、因子Aまたは因子Bの片方が有意

②交互作用 $A \times B$ が有意でなく、因子Aおよび因子Bの両方が有意

③交互作用 $A \times B$ が有意(因子Aおよび因子Bが有意であるかどうかにかかわらず)

※本例は③に該当する。

①②の場合、プーリング(交互作用 $A \times B$ の平方和と自由度を誤差項のそれに加え込むこと)を行い、推定精度を上げることができます。

プーリングとは？

プーリングとは、**効果のない項**を誤差と見なして、それらの平方和と自由度を誤差項の平方和と自由度に足し込み、**新たな誤差分散**を求めることです。

これにより、**誤差の自由度が増え、誤差分散の推定精度が上がります。**

⇒ 具体的には、交互作用 $A \times B$ の平方和($S_{A \times B}$)と自由度($\phi_{A \times B}$)を誤差項Eの平方和(S_e)と自由度(ϕ_e)にそれぞれ加え込むことです。これにより分散分析表を作り直します。

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
因子A	S_A	ϕ_A	V_A	$F_0 = \frac{V_A}{V_e}$
因子B	S_B	ϕ_B	V_B	$F_0 = \frac{V_B}{V_e}$
交互作用 $A \times B$	$S_{A \times B}$	$\phi_{A \times B}$	$V_{A \times B}$	$F_0 = \frac{V_{A \times B}}{V_e}$
誤差 e	S_e	ϕ_e	V_e	
合計	S_T	ϕ_T		

プーリング

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
因子A	S_A	ϕ_A	V_A	$F_0 = \frac{V_A}{V_e'}$
因子B	S_B	ϕ_B	V_B	$F_0 = \frac{V_B}{V_e'}$
誤差 e'	$S_{A \times B} + S_e$	$\phi_{A \times B} + \phi_e$	$V_{e'}$	$F_0 = \frac{V_{A \times B}}{V_e'}$
合計	S_T	ϕ_T		

有意でなく、 F_0 値も小さい場合

交互作用 $A \times B$ を誤差項にプーリング

②推定

手順1 最適な組み合わせ条件の選定

特性値が大きい方がよいので、二元表において最大値となる A_3B_2 を選定します。

手順2 最適条件での母平均の推定

母平均 μ の点推定

$$\hat{\mu}(A_3B_2) = A_3B_2 \text{の平均値} = (11 + 12) / 2 = 23 / 2 = \mathbf{11.5}$$

母平均 μ の区間推定(信頼度95%)

$$\widehat{\mu_{AiBj}} - t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}} < \mu_{AiBj} < \widehat{\mu_{AiBj}} + t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}} \quad (n: \text{繰り返し数})$$

なお、交互作用 $A \times B$ が有意でなく、プーリングを行う場合(交互作用 $A \times B$ を無視する場合)、以下の式により区間推定を行う。

$$\widehat{\mu_{AiBj}} - t(\phi_{e'}, 0.05) \sqrt{V_{e'} / n_{e'}} < \mu_{AiBj} < \widehat{\mu_{AiBj}} + t(\phi_{e'}, 0.05) \sqrt{V_{e'} / n_{e'}}$$

※因子と水準の組み合わせで、特性値が最も大きくなる条件を「最適条件」という

$$\text{有効反復係数 } n_e = \frac{abn}{1 + \phi_A + \phi_B + \phi_{A \times B}} \quad (\text{田口の公式})$$

(a : A の水準数、 b : B の水準数、 n : 繰り返し数)

で表されます。

$t(\phi_e, 0.05) \sqrt{V_e/n}$ を計算します。

$$t(\phi_e, 0.05) \sqrt{\frac{V_e}{n}} = t(12, 0.05) \sqrt{\frac{0.63}{2}} \doteq 2.179 \times 0.561 \doteq 1.22$$

$$11.5 - 1.22 < \mu_{A_3B_2} < 11.5 + 1.22$$

$$10.28 < \mu_{A_3B_2} < 12.72$$

有効反復係数 n_e と田口の公式、伊奈の公式

有効反復係数 n_e とは、点推定量が何個分のデータから計算されたものと等価であるかを示すものです。有効反復係数 n_e を計算する主な公式として、田口の公式と伊奈の公式があります。

$$\text{田口の公式: } n_e = \frac{\text{全データ数}}{1 + (\text{推定に用いる要因の自由度の和})}$$

$$(\text{二元配置分析では}) = \frac{abn}{1 + \phi_A + \phi_B + \phi_{A \times B}}$$

(a : A の水準数、 b : B の水準数、 n : 繰り返し数)

$$\text{伊奈の公式: } \frac{1}{n_e} = \text{点推定の式に用いられている係数の和} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab}$$

練習問題

赤シートで正解を隠して設問に答えてください(解説はP.145から)。

【問1】 3つの工場を選定し、ある品質特性における繰り返し3回の一元配置実験を行ったところ、以下の統計量が得られた。この統計量をもとに下表の分散分析表を作成することになった。□に入る数値を答えよ。ただし、(9)についてはもっとも適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。

個々のデータの合計値 $\sum x_{ij} = 250$

個々のデータの二乗の合計値 $\sum x_{ij}^2 = 7500$

分散分析表

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
因子A	(1)	(3)	(6)	(8)
誤差E	100	(4)	(7)	—
計	(2)	(5)	—	—

以上より、因子Aは(9)といえる。

<(1)~(8)の選択肢>

ア. 556 イ. 456 ウ. 228 エ. 16.7 オ. 13.65

カ. 8 キ. 6 ク. 2

<(9)の選択肢>

ア. 有意な差がある イ. 有意な差がない

正解 (1) **イ** (2) **ア** (3) **ク** (4) **キ** (5) **カ**
(6) **ウ** (7) **エ** (8) **オ** (9) **ア**

【問2】 次の①②に答えよ。

①データの構造式において、A群とB群を正しく組み合わせよ。

A群:

ア. 一元配置法

イ. 二元配置法(繰り返しなし)

ウ. 二元配置法(繰り返しあり)

B群:

エ. $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

オ. $x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

カ. $x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

※ $\sum \sum$ の計算方法を紹介する。 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} + x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m} + \cdots + x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm}$ まず $i=1$ として、 j を1から m まで動かして x_{1j} を足し合わせる。すなわち、 $\sum x_{1j}$ を求める。続いて、この操作を $i=2, 3, \dots, m$ まで同様に繰り返して、すべてを足し合わせる

第7章

抜取検査

合格のポイント

- 抜取検査の考え方・手順、用語の意味、OC曲線(検査特性曲線)の見方の理解
- 計数規準型抜取検査および計量規準型一回抜取検査の基本的な考え方や検査表の見方の理解

【問2】(要因配置実験)

① **ア**ー**エ**、**イ**ー**カ**、**ウ**ー**オ**

A群

B群

ア. 一元配置法

ー **エ**. $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

イ. 二元配置法(繰り返しなし)ー **カ**. $x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

ウ. 二元配置法(繰り返しあり)ー **オ**. $x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

② **ア**ー**ク**、**イ**ー**オ**、**ウ**ー**カ**、**エ**ー**キ**

A群

B群

ア. 因子ー **ク**. 実験に取り上げられた要因

イ. 水準ー **オ**. 因子を量的、質的に変動させる場合に、特に代表値として選んだ値

ウ. 効果ー **カ**. 応答の平均に対する因子の影響

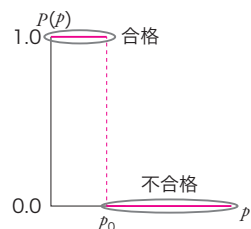
エ. 要因ー **キ**. ある結果を引き起こす可能性のあるもの

【問3】(二元配置実験)

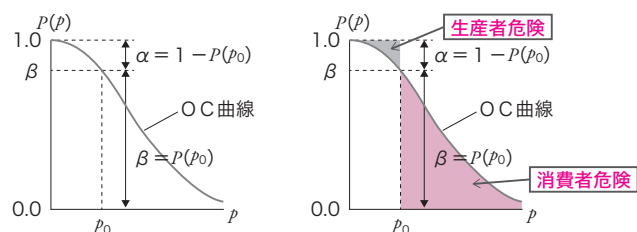
(1) **ア** (2) **ウ** (3) **カ**

二元配置法における因子による効果には、実験に取り上げた因子の水準を変更することによる(1)**ア**. **主効果**と、二つ以上の因子のある水準が組み合わさったときに相乗的または相殺的に特性値が変動する(2)**ウ**. **交互作用効果**の2種類がある。**交互作用効果**を検定するには、各水準の組み合わせの実験を最低(3)**カ**. **2**回繰り返す必要がある。

図表 7.4 全数検査のOC曲線の例



図表 7.5 抜取検査のOC曲線の例



図表 7.5 (右図)において、生産者危険と消費者危険の領域が生じます。

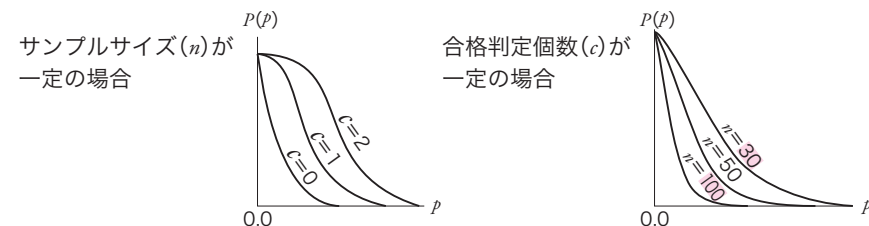
図中の $\alpha (= 1 - P(p_0))$ は不良品率が低いのに (p_0 以下)、検査合格率が 100% 以下 ($1 - \alpha$) となってしまいます。 α が大きいと生産者にとって不利な状況となりますので、**生産者危険**または**第1種の誤り**(あわてものの誤り)といっています。

一方、図中の $\beta (= P(p_0))$ は不良品率が高いのに (p_0 以上)、検査合格率が 0% 以上 (β) となってしまいます。 β が大きいと消費者にとって不利・危険な状況となりますので、**消費者危険**または**第2種の誤り**(ぼんやりものの誤り)といっています。

なお、OC 曲線の主な特徴としては、以下の2点です。

- サンプルサイズ (n) が一定の場合、合格判定個数 (c) が大きくなるほど曲線の傾きは緩やかになり、合格判定個数 (c) が小さくなるほど曲線の傾きは急になる(次ページ図表 7.6 の左図参照)。
- 合格判定個数 (c) が一定の場合、サンプルサイズ (n) が大きくなるほど曲線の傾きは急になり、サンプルサイズ (n) が小さくなるほど曲線の傾きは緩やかになる(図表 7.6 の右図参照)。

図表 7.6 OC 曲線の主な特徴



3 計数規準型抜取検査

計数規準型抜取検査(JIS Z9002-1956)とは、生産者および消費者の要求する検査特性を持つように設計した抜取検査で、**ロットごとの合格・不合格を一回に抜き取った試料中の不良品の個数によって判定する**ものです。製品がロットとして処理できることが必要で、合格ロット中にもある程度の不良品の混入は避けられません。

検査の手順は、以下のとおりです。

手順1 品質基準の決定

- 検査単位について適合品と不適合品とに分けるための基準を明確に定める。

手順2 p_0 、 p_1 の値の指定

- p_0 ：なるべく合格させたいロットの不良率の上限
- p_1 ：なるべく不合格としたいロットの不良率の下限
- この p_0 と p_1 を指定する。通常は、 p_0 と p_1 の値は生産能力・経済的事情・品質に対する必要な要求または検査にかかる費用・労力・時間など各取引の実情を考え合わせて指定する。抜取検査では、必ず $p_0 < p_1$ でなければならない。

手順3 ロットの形成

- 同一条件で生産されたロットをなるべくそのまま検査ロットに選ぶ。ロットがはなはだしく大きい場合は、小ロットに区切って検査ロットとしてもよい。

手順4 試料の大きさ n と合格判定個数 c を求める

- P_0 、 P_1 の値から、計数規準型抜取検査表を用いて n と c を求める。
- n がロットの大きさを超える場合は全数検査を行う。

手順5 試料の採取

- 検査ロットの中から、手順4で求めた大きさ n の試料をできるだけロットを代表するようにしてとる。

手順6 試料の調査

- 手順1で定めた品質基準に従って試料を調べ、試料中の不良品の数を調べる。

手順7 判定

- 試料中の不良品の数が合格判定個数 c 以下であればそのロットを合格とし、 c を超せばそのロットを不合格とする。

手順8 ロットの処置

- 合格または不合格と判定されたロットは、あらかじめ決めた約束に従って処置する。どのような場合でも、不合格となったロットをそのまま再提出してはならない。

〈例1〉 $P_0=1.0\%$ 、 $P_1=5.0\%$ の場合の n 、 c を求める。

付表(計数規準型1回抜き取り検査表)において、 $P_0=1.0\%$ を含む行と、 $P_1=5.0\%$ を含む列の交わる欄の数値を読み取る。欄内には「120 3」とあり、左側が n 、右側が c の値となる。よって、 $n=120$ 、 $c=3$ となる。

$P_0(\%) \backslash P_1(\%)$	0.71 0.90	0.91 1.12	1.13 1.40	1.41 1.80	1.81 2.24	2.25 2.81	2.81 3.55	3.56 4.50	4.51 5.60	5.61 7.10	7.11 9.00	9.01 11.2	11.3 14.0
0.090~0.112	*	400 1	↓	←	↓	→	60 0	50 0	←	↓	↓	←	↓
0.113~0.140	*	↓	300 1	↓	←	↓	→	↑	40 0	←	↓	↓	←
0.141~0.180	*	500 2	↓	250 1	↓	←	↓	→	↑	30 0	←	↓	↓
0.181~0.224	*	*	400 2	↓	200 1	↓	←	↓	→	↑	25 0	←	↓
0.225~0.280	*	*	500 3	300 2	↓	150 1	↓	←	↓	→	↑	20 0	←
0.281~0.355	*	*	*	400 3	250 2	↓	120 1	↓	←	↓	→	↑	15 0
0.356~0.450	*	*	*	500 4	300 3	200 2	↓	100 1	↓	←	↓	→	↑
0.451~0.560	*	*	*	*	400 4	250 3	150 2	↓	80 1	↓	←	↓	→
0.561~0.710	*	*	*	*	500 6	300 4	200 3	120 2	↓	60 1	↓	←	↓
0.711~0.900	*	*	*	*	*	400 6	250 4	150 3	100 2	↓	50 1	↓	←
0.901~1.12	*	*	*	*	*	300 6	200 4	120 3	80 2	↓	40 1	↓	←
1.13~1.40			*	*	*	500 10	250 6	150 4	100 3	60 2	↓	30 1	↓
1.41~1.80				*	*	*	400 10	200 6	120 4	80 3	50 2	↓	↓
1.81~2.24					*	*	*	300 10	150 6	100 4	60 3	40 2	↓

〈例2〉 $P_0=0.15\%$ 、 $P_1=2.5\%$ の場合の n 、 c を求める。

付表(計数規準型1回抜き取り検査表)において、 $P_0=0.15\%$ を含む行と、 $P_1=2.5\%$ を含む列の交わる欄の数値を読み取る。欄内には「←」とあるので、数値の入った欄まで左側に進む。「250 1」とあり、左側が n 、右側が c の値となることから、 $n=250$ 、 $c=1$ となる。

$P_0(\%) \backslash P_1(\%)$	0.71 0.90	0.91 1.12	1.13 1.40	1.41 1.80	1.81 2.24	2.25 2.81	2.81 3.55	3.56 4.50	4.51 5.60	5.61 7.10
0.090~0.112	*	400 1	↓	←	↓	→	60 0	50 0	←	↓
0.113~0.140	*	↓	300 1	↓	←	↓	→	↑	40 0	←
0.141~0.180	*	500 2	↓	250 1	↓	←	↓	→	↑	30 0

〈例3〉 $P_0=0.3\%$ 、 $P_1=1.0\%$ の場合の n 、 c を求める。

付表(計数規準型1回抜き取り検査表)において、 $P_0=0.3\%$ を含む行と、 $P_1=1.0\%$ を含む列の交わる欄の数値を読み取る。欄内には「*」とあるので、付表(抜取検査設計補助表)を参照し、 $P_1/P_0=1.0/0.3 \approx 3.33$ を含む3.5~2.8の行にある数値となることから、 $c=6$ 、 $n=164/P_0+527/P_1=164/0.3+527/1.0=1073.67 \rightarrow 1074$ (抜き取り検査の値は正の整数となるので、小数点以下を切り上げる)。

$P_0(\%) \backslash P_1(\%)$	0.71 0.90	0.91 1.12	1.13 1.40
0.090~0.112	*	400 1	↓
0.113~0.140	*	↓	300 1
0.141~0.180	*	500 2	↓
0.181~0.224	*	*	400 2
0.225~0.280	*	*	500 3
0.281~0.355	*	*	*

4 計量規準型一回抜取検査(標準偏差既知)

標準偏差既知でロットの平均値を保証する場合および標準偏差既知でロットの不良率を保証する場合の計量規準型一回抜取検査(JIS Z 9003-1979)とは、ロットの品質をロットの平均値または不良率で表した場合に生産者および消費者の要求する検査特性を持つように設計した抜取検査であって、一回に抜き取った試料の特性値の平均値に対し既知の標準偏差を使って計算した合格判定値を比較することによって、ロットの合格・不合格を判定するものです。

この検査の適用に当たっては、

- (1) 検査単位の品質は、計量値で表し得ること
- (2) 製品がロットとして処理できること
- (3) ロットの特性値の標準偏差がわかっていることが必要であること
- (4) 不良率による場合は、特性値が正規分布をしているものとして取り扱われ

2 管理図の種類

利用目的・取り扱うデータによって、**管理図**を使い分けます。以下に主な管理図を紹介します。データに偏りが大きいときは、平均値ではなく、中央値を用いる場合があります。

図表 8.3 管理図の種類

特性	名称	概要 (評価値→評価されるもの)	中心線(CL)、上方管理限界線(UCL)、 下方管理限界線(LCL)	
計量値／連続量(正規分布を仮定する)	$\bar{X}-R$ 管理図	$\bar{X}$ 管理図と R 管理図を組み合わせたもの。サンプル数が一定で、9 以下の場合に用いる。 $\bar{X}$ ：データ群の平均を時系列で打点したもので、工程水準の評価に用いる R ：各データ群の最大値と最小値の差(範囲)を時系列で打点したもので、変動の評価に用いる。	【 $\bar{X}$ 管理図】 $CL = \bar{\bar{x}}$ $UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$ $LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$ ※母平均 μ_0 と母標準偏差 σ_0 が与えられている場合は、 $CL = \mu_0$ $UCL = \mu_0 + A \sigma_0$ $LCL = \mu_0 - A \sigma_0$	【 R 管理図】 $CL = \bar{R}$ $UCL = D_4 \bar{R}$ $LCL = D_3 \bar{R}$
	$\bar{X}-s$ 管理図	$\bar{X}$ 管理図と s 管理図を組み合わせたもの。サンプル数が一定で、10 以上の場合に用いる。 $\bar{X}$ ：データ群の平均を時系列で打点したもので、工程水準の評価に用いる s ：各データ群の標準偏差(バラツキ具合)を打点したもので、変動の評価に用いる。	【 $\bar{X}$ 管理図】 $CL = \bar{\bar{x}}$ $UCL = \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{s}$ $LCL = \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{s}$	【 s 管理図】 $CL = \bar{s}$ $UCL = B_4 \bar{s}$ $LCL = B_3 \bar{s}$

	$Me-R$ 管理図	Me 管理図と R 管理図を組み合わせたもの。データの平均に偏りがある場合に用いる。 Me ：データ群の中央値を時系列で打点したもので、工程水準の評価に用いる R ：各データ群の最大値と最小値の差(範囲)を時系列で打点したもので、変動の評価に用いる。	【 Me 管理図】 $CL = \bar{Me}$ $UCL = \bar{Me} + A_4 \bar{R}$ $LCL = \bar{Me} - A_4 \bar{R}$ $\left(\begin{array}{l} \bar{Me} \\ (= \bar{x} \text{の平均値}) \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{l} A_4 = m_3 A_2 \\ (\text{P.165 参照}) \end{array} \right)$	【 R 管理図】 $CL = \bar{R}$ $UCL = D_4 \bar{R}$ $LCL = D_3 \bar{R}$
計数値／離散値(二項分布を仮定する)	np 管理図 (number : 数、 propotion : 割合)	サンプルサイズ(n)が一定の場合に用いる。全体の合計(n)×不適合品率(p)=不適合品数→不適合品数を打点したもので、不適合品数の評価に用いる。	$CL = n\bar{p}$ $UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$ $LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$	
	p 管理図 (propotion : 割合)	サンプルサイズが変動し、サンプルサイズを一定にできないときに用いる。 不適合品数/サンプル数の不適合品率を打点したもので、不良品率(不適合品率)の評価に用いる。	$CL = \bar{p}$ $UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}$ $LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}$	
計数値／離散値(ポアソン分布を仮定する)	c 管理図 (count : 数える)	サンプルサイズが一定の場合に用いる。 不適合数(c)を打点したもので、不適合品数の評価に用いる。	$CL = \bar{c}$ $UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$ $LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$	
	u 管理図 (unit : 単位)	サンプルサイズが変動し、一定でない場合に用いる。 不適合数/サンプル数の単位あたりの不適合率(u)を打点したもので、単位当たりの不適合品数の評価に用いる。	$CL = \bar{u}$ $UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n}$ $LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n}$	

※ A_1 、 A_2 、 A_3 、 B_3 、 B_4 、 D_3 、 D_4 はサンプルサイズ n によって定まる(各係数表参照)

3 管理図の作成手順

1) $\bar{X}$ - R 管理図 ……平均値と範囲の管理図

サンプル数が一定で、9以下の場合に用いられます。

手順1 データの収集・データ表の作成

群の番号	測定値		計	平均値	範囲
	x_1	x_2	Σx	$\bar{x}$	R
1	5	6	11	5.5	1
2	4	5	9	4.5	1

手順2 管理値の計算

①平均値

群ごとに平均値を計算する。

群1の平均値 $\bar{x}_1 = (5 + 6) / 2 = 5.5$

群2の平均値 $\bar{x}_2 = (4 + 5) / 2 = 4.5$

②範囲

群ごとに範囲 R を計算する。

$R = x$ の最大値 - x の最小値

群1の範囲 $R_1 = 6 - 5 = 1$

群2の範囲 $R_2 = 5 - 4 = 1$

図表8.4 $\bar{X}$ - R 管理図用係数表

サンプルサイズ n	$\bar{X}$ 管理図		R 管理図			
	A	A_2	D_3	D_4	d_2	d_3
2	2.121	1.88	—	3.27	1.128	0.853
3	1.732	1.02	—	2.57	1.693	0.888
4	1.500	0.73	—	2.28	2.059	0.880
5	1.342	0.58	—	2.11	2.326	0.864
6	1.225	0.48	—	2.00	2.534	0.848
7	1.134	0.42	0.08	1.92	2.704	0.833
8	1.061	0.37	0.14	1.86	2.847	0.820
9	1.000	0.34	0.18	1.82	2.970	0.808
10	0.949	0.31	0.22	1.78	3.078	0.797

手順3 管理限界線の計算

● $\bar{X}$ 管理図

中心線 $CL = \bar{\bar{x}} = (5.5 + 4.5) / 2 = 5.0$ ※ $\bar{\bar{x}}$ は $\bar{x}$ の平均値

上方管理限界線 $UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 5.0 + 1.88 \times 1 = 6.88$

下方管理限界線 $LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 5.0 - 1.88 \times 1 = 3.12$

(A_2 は係数表から求める)

● R 管理図

上方管理限界線 $UCL = D_4 \bar{R} = 3.27 \times 1 = 3.27$

下方管理限界線 $LCL = D_3 \bar{R}$ ※ $n \leq 6$ の場合は考慮しない

(D_4 、 D_3 は付表から求める。サンプルサイズ $n = 2$)

2) $\bar{X}$ - s 管理図 ……平均値と標準偏差(バラツキ)の管理図

サンプル数が一定で、10以上の場合に用いられます。

手順1 データの収集・データ表の作成

群番号	測定値										計	平均値	標準偏差
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Σx	$\bar{x}$	s
1	5	6	2	3	4	1	5	2	4	5	37	3.7	1.64
2	4	5	1	4	5	6	2	2	3	1	33	3.3	1.77

手順2 管理値の計算

①平均値

群ごとに平均値を計算する。

群1の平均値 $\bar{x}_1 = (5 + 6 + 2 + 3 + 4 + 1 + 5 + 2 + 4 + 5) / 10 = 3.7$

群2の平均値 $\bar{x}_2 = (4 + 5 + 1 + 4 + 5 + 6 + 2 + 2 + 3 + 1) / 10 = 3.3$

②標準偏差

群ごとに標準偏差 s を計算する。

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{S}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n}{n-1}}$$

$$\text{標準偏差 } s_1 = \sqrt{\frac{161 - 37^2 / 10}{10 - 1}} \div 1.636$$

$$\text{標準偏差 } s_2 = \sqrt{\frac{137 - 33^2 / 10}{10 - 1}} \div 1.767 \rightarrow \bar{s} = \frac{1.636 + 1.767}{2} \div 1.70$$

図表 8.5 $\bar{X}$ - s 管理図用係数表

サンプルサイズ	$\bar{X}$ 管理図	s 管理図	
n	A_3	B_4	B_3
2	2.659	3.267	—
3	1.954	2.568	—
4	1.628	2.266	—
5	1.427	2.089	—
6	1.287	1.970	0.030
7	1.182	1.882	0.118
8	1.099	1.815	0.185
9	1.032	1.761	0.239
10	0.975	1.716	0.284

手順3 管理限界線の計算

● $\bar{X}$ 管理図

中心線 $CL = \bar{\bar{x}} = (3.7 + 3.3) / 2 = 3.5$

上方管理限界線 $UCL = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} = 3.5 + 0.975 \times 1.70 \doteq 5.16$

下方管理限界線 $LCL = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s} = 3.5 - 0.975 \times 1.70 \doteq 1.84$

(A_3 は係数表から求める)

● s 管理図

中心線 $CL = \bar{s} = 1.70$

上方管理限界線 $UCL = B_4 \times \bar{s} = 1.716 \times 1.70 \doteq 2.92$

下方管理限界線 $LCL = B_3 \times \bar{s} = 0.284 \times 1.70 \doteq 0.48$

(B_4 、 B_3 は付表から求める)

3) $Me-R$ 管理図 ……中央値と範囲の管理図

データの平均に偏りがあり、平均値を用いることが好ましくない場合に用いられます。 Me はMedian(メディアン、中央値)の略で、 $\tilde{x}$ と表記されることもあります。

手順1 データの収集・データ表の作成

群番号	測定値										計 Σx	中央値 $\tilde{x}$	範囲 R
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}			
1	5	6	2	3	4	1	5	2	4	5	37	4	5
2	4	5	1	4	5	6	2	2	3	1	33	3.5	5

手順2 管理値の計算

① 中央値

群ごとに中央値を計算する。

群1の中央値 $\tilde{x}_1 = 4$

群2の中央値 $\tilde{x}_2 = (3 + 4) / 2 = 3.5$

② 範囲

群ごとに範囲 R を計算する。

$R = x$ の最大値 - x の最小値

群1の範囲 $R_1 = 6 - 1 = 5$

群2の範囲 $R_2 = 6 - 1 = 5$

図表 8.6 Me 管理図係数表

サンプルサイズ n	Me 管理図 $m_3A_2 (=A_4)$
2	1.880
3	1.187
4	0.796
5	0.691
6	0.549
7	0.509
8	0.432
9	0.412
10	0.363

手順3 管理限界線の計算

● Me 管理図

中心線 $CL = \bar{\tilde{x}} = (4 + 3.5) / 2 = 3.75$ ※ $\bar{\tilde{x}}$ は $\tilde{x}$ の平均値

上方管理限界線 $UCL = \bar{\tilde{x}} + m_3A_2\bar{R} = 3.75 + 0.363 \times 5 = 5.565$

下方管理限界線 $LCL = \bar{\tilde{x}} - m_3A_2\bar{R} = 3.75 - 0.363 \times 5 = 1.935$

※ $m_3A_2 (=A_4)$ は群の大きさ n によって定まる値で、 Me 管理図係数表から求める

● R 管理図

中心線 $CL = \bar{R} = 5$

上方管理限界線 $UCL = D_4\bar{R} = 1.78 \times 5 = 8.90$

下方管理限界線 $LCL = D_3\bar{R} = 0.22 \times 5 = 1.10$

(D_4 、 D_3 は係数表から求める。P.162参照)

4) np 管理図 ……不適合品数の管理図

不適合品数について用います。群の大きさが一定である必要があります。

手順1 データの収集・データ表の作成

○日目	不適合品数 np
1	1
2	2
3	0
4	1
5	3

$n=20$ 個とする。

手順2 管理値の計算

●平均不適合品数 $n\bar{p}$

$$n\bar{p} = \Sigma (np)_i / k = (1 + 2 + 0 + 1 + 3) / 5 = 1.4$$

$(np)_i$: 各群の不適合品数、 k : 群の数

なお、 $\bar{p}$ (平均不適合品率) は、 $\bar{p} = \Sigma (np)_i / \Sigma n_i = \frac{7}{100}$

手順3 管理限界線の計算

中心線 $CL = n\bar{p} = 1.4$

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ &= 1.4 + 3\sqrt{1.4(1-7/100)} \doteq 4.82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ &= 1.4 - 3\sqrt{1.4(1-7/100)} \doteq -2.02 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

5) p 管理図 ……不適合品率の管理図

不適合品率について用います。群の大きさが一定でない場合に用います。

手順1 データの収集・データ表の作成

○日目	群の大きさ	不適合品数
1	50	1
2	50	2
3	30	0
4	30	1
5	40	3

不適合品率($\bar{p}$)は、不適合品数(np) / 群の大きさ(n)により計算する。

手順2 管理値の計算

●平均不適合品率 $\bar{p}$

$$\bar{p} = \Sigma (np)_i / \Sigma n_i = \frac{1 + 2 + 0 + 1 + 3}{50 + 50 + 30 + 30 + 40} = 0.035$$

$(np)_i$: 各群の不適合品数、 n_i : 群の大きさ

手順3 管理限界線の計算

中心線 $CL = \bar{p} = 0.035$

$n_i=50$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} \\ &= 0.035 + 3\sqrt{0.035(1-0.035)/50} \doteq 0.11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} \\ &= 0.035 - 3\sqrt{0.035(1-0.035)/50} \doteq -0.04 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

$n_i=30$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} \\ &= 0.035 + 3\sqrt{0.035(1-0.035)/30} \doteq 0.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} \\ &= 0.035 - 3\sqrt{0.035(1-0.035)/30} \doteq -0.07 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

$n_i=40$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} \\ &= 0.035 + 3\sqrt{0.035(1-0.035)/40} \doteq 0.12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} \\ &= 0.035 - 3\sqrt{0.035(1-0.035)/40} \doteq -0.05 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

6) c 管理図 ……各群の不適合数の管理図

群の大きさが一定のサンプルを採取して、各群における欠点数(不適合数)を調査します。

手順1 データの収集・データ表の作成

群No.	群の大きさ	欠点数	群No.	群の大きさ	欠点数
1	50	1	11	50	1
2	50	2	12	50	2
3	50	0	13	50	0
4	50	1	14	50	1
5	50	3	15	50	3
6	50	4	16	50	0
7	50	1	17	50	2
8	50	0	18	50	3
9	50	2	19	50	1
10	50	3	20	50	4

欠点数(不適合数)(c)は、欠点数の総和(Σc)／群の大きさ(k)により計算する。

手順2 管理値の計算

●平均欠点数(不適合数) $\bar{c}$

$$\bar{c} = \Sigma c / k = (1 + 2 + 0 + 1 + 3 + 4 + 1 + 0 + 2 + 3 + 1 + 2 + 0 + 1 + 3 + 0 + 2 + 3 + 1 + 4) / 20 = 34 / 20 = 1.7$$

$\bar{c}$: 工程平均欠点数、 Σc : 欠点数の総和、 k : 群の数

手順3 管理限界線の計算

$$\text{中心線 } CL = \bar{c} = 1.7$$

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ &= 1.7 + 3\sqrt{1.7} \approx 5.61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \\ &= 1.7 - 3\sqrt{1.7} \approx -2.21 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

7) u 管理図 ……単位あたりの不適合率の管理図

群の大きさの異なるサンプルを採取して、**サンプルサイズ(面積、長さ等)とサンプル中の欠点数(不適合数)を調査**します。

手順1 データの収集・データ表の作成

群No.	群の大きさ	欠点数	群No.	群の大きさ	欠点数
1	50	1	11	30	1
2	50	2	12	30	2
3	50	0	13	30	0
4	50	1	14	30	1
5	50	3	15	30	3
6	40	4	16	20	0
7	40	1	17	20	2
8	40	0	18	20	3
9	40	2	19	20	1
10	40	3	20	20	4

手順2 管理値の計算

●平均欠点率(不適合率) $\bar{u}$

$$\begin{aligned} \bar{u} = \Sigma c / \Sigma n &= (1 + 2 + 0 + 1 + 3 + 4 + 1 + 0 + 2 + 3 + 1 + 2 + 0 + 1 + 3 + 0 + 2 + 3 + 1 + 4) / (50 \times 5 + 40 \times 5 + 30 \times 5 + 20 \times 5) \\ &= 34 / 700 \approx 0.049 \end{aligned}$$

$\bar{u}$: 工程平均欠点率、 Σc : 欠点数の総和、 Σn : サンプルサイズの総和

手順3 管理限界線の計算

$$\text{中心線 } CL = \bar{u} = 0.049$$

$n_i = 50$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n_i} \\ &= 0.049 + 3\sqrt{0.049/50} \approx 0.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n_i} \\ &= 0.049 - 3\sqrt{0.049/50} \approx -0.04 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

$n_i = 40$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n_i} \\ &= 0.049 + 3\sqrt{0.049/40} \approx 0.15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下方管理限界線 } LCL &= \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n_i} \\ &= 0.049 - 3\sqrt{0.049/40} \approx -0.06 \end{aligned}$$

マイナスになる場合は考慮しない。

$n_i = 30$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{上方管理限界線 } UCL &= \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n_i} \\ &= 0.049 + 3\sqrt{0.049/30} \approx 0.17 \end{aligned}$$

1 工程能力指数

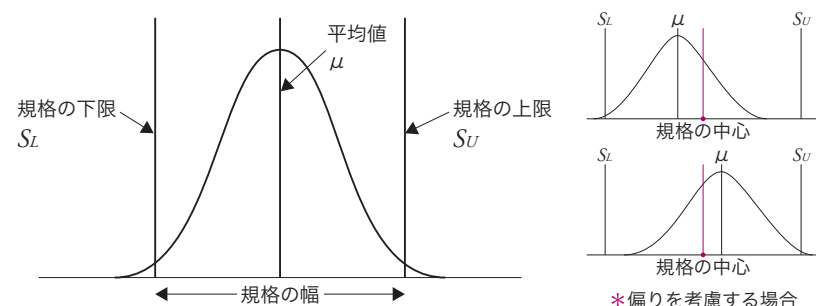
工程能力とは、定められた規格の限度内で製品を生産できる能力のことです。(JIS Z8101:2015において)統計的管理状態(異常原因が取り除かれた安定状態)にあることが実証されたプロセスについての、特性の成果に関する統計的推定値であり、プロセスが特性に関する要求事項を実現する能力を記述したものと定義されています。

この評価を行う指標を**工程能力指数**といい、 C_p (C_{pk}) (Process Capability Index)と表されます。

C_p と C_{pk} との使い分けについて、 C_p は品質特性値の母平均が規格の中心にあることがわかっている場合に使用されます。一方、 C_{pk} はそうでない(偏りを考慮する)場合に使用されます。

母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと仮定した場合、工程能力指数の算定式は以下のとおりです。

図表9.1 平均値、規格の上限・下限、規格の幅



1) 両側規格の場合

上限規格値 S_U と下限規格値 S_L の両方が決まっている場合は、以下の式で工程能力を算定します。

$$C_p = \frac{S_U - S_L}{6\sigma} \quad (\sigma: \text{標準偏差})$$

2) 片側規格の場合

上限規格値 S_U または下限規格値 S_L のいずれか片方のみが決まっている場合は、以下の式で工程能力を算定します。

① 上限規格値 S_U のみが決まっている場合

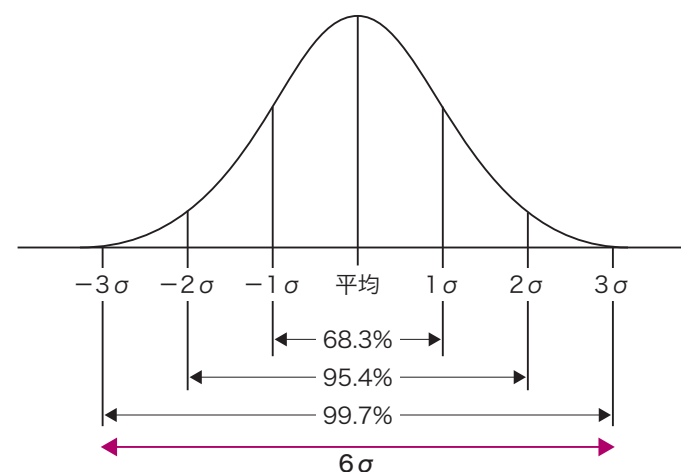
$$C_p (\text{上限}) = \frac{S_U - \mu}{3\sigma} \quad (\sigma: \text{標準偏差}, \mu: \text{平均値})$$

② 下限規格値 S_L のみが決まっている場合

$$C_p (\text{下限}) = \frac{\mu - S_L}{3\sigma} \quad (\sigma: \text{標準偏差}, \mu: \text{平均値})$$

なお、両側規格の場合でも平均値が規格の中心(規格の幅/2)から大きくズレている(偏りがある)場合があります。このような場合は C_{pk} と表記し、上記①と②の計算を行い、①と②から得られた値を比較して、小さい方を採用します。

図表9.2 $N(\mu, \sigma^2)$ において $\mu \pm a\sigma$ に入る確率



なお、標準偏差は、範囲 R を用いて、 $\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$ で示されます。
(d_2 : 係数(管理限界線を計算するための係数表から求める))

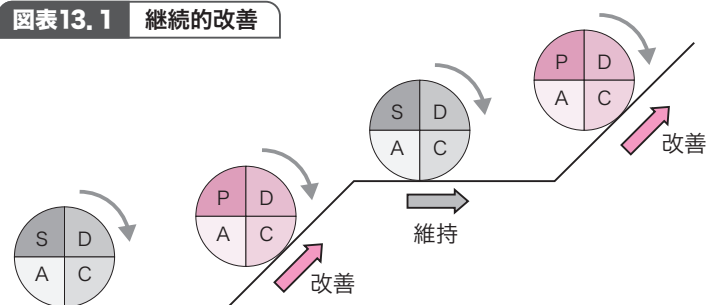
1 維持と管理、継続的改善

維持とは、製品・サービスの適切な状態をそのまま保ち続けることであり、維持のために管理を適切に行う必要があります。具体的には**5M**(原材料(Material)、設備(Machine)、方法(Method)、作業者(Man)、計測(Measurement))を用いて、**SDCAサイクル**を回して管理を行います。

一方、製品・サービスに対する、顧客のニーズ・期待は常に進化することから、**継続的改善**を行う必要があります。

継続的改善とは、製品・サービスの品質向上のために繰り返し行われる活動であり、具体的には**SDCAサイクル**と**PDCAサイクル**を組み合わせることで行っていきます。

図表13.1 継続的改善



S: Standardize

D: Do

C: Check

A: Act

P: Plan

D: Do

C: Check

A: Act

SDCA

Standardize(標準化)→Do(実行)→Check(評価)→Act(措置)の頭文字を取ったもの。日常管理を行ううえでのサイクル。

PDCA

Plan(計画)→Do(実行)→Check(評価)→Act(措置)の頭文字を取ったもの。改善活動を行ううえでのサイクル。

その他の重要キーワードは以下の通りです。

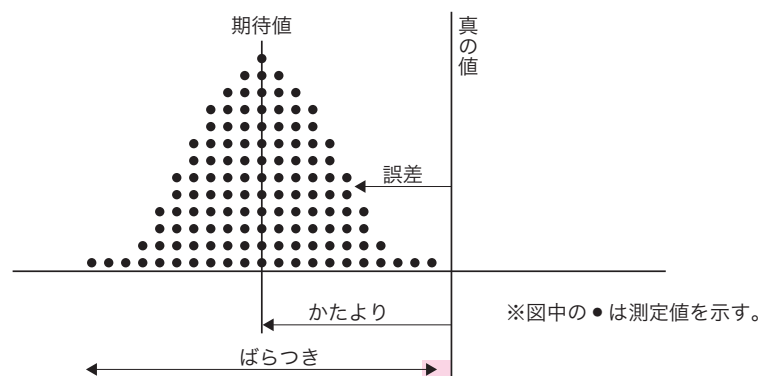
キーワード	概要
ハインリッヒの法則	ハインリッヒ(米国損害保険会社勤務)が5,000件以上の労働災害の調査結果から得た経験則である。重大な災害・事故が発生したケースにおいて、その背景には29件の小さな事故やケガが発生しており、300件のヒヤリハットがあったというものである。
見える化	プロセスの状況を関係者全員が理解できるように可視化すること。

2 自主保全活動

自主保全活動とは、作業者一人一人が自分の担当する設備は自分で守ることを目的として、**7つのステップ**で設備の保全活動を行うものです。

ステップ	名称	主な内容
第1ステップ	初期清掃	設備のゴミ・ホコリ・汚れの清掃を行い、設備の不具合発見と復元を行う。
第2ステップ	発生源・困難箇所の対策	ゴミ・ホコリ・汚れの発生源、清掃・給油・増締め・点検等が困難な箇所の改善により、清掃・点検時間を短縮する。
第3ステップ	自主保全仮基準の作成	清掃・給油・増締めを短時間で確実にを行う行動基準類を作成する。

図表14.4 誤差・かたより・ばらつき



練習問題

赤シートで正解を隠して設問に答えてください(解説はP.222から)。

【問1】 品質保証に関する次の文章において、内に入る最も適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。

新製品開発において、量産段階での不具合発生による手戻り・ロスをできるだけ防ぐため、での問題予測・是正・改善が重要である。

製品の設計・開発を進めるうえで、設計者・開発者の知見だけでなく、より多くの関係者(営業、製造、購買、品質保証部門等)を集め、知見やを結集し、さまざまな角度から検討することをという。には、製品企画への移行の可否を決める審査、製品設計への移行の可否を決める審査、設計品質達成状況を確認するための審査がある。

〈選択肢〉

- ア. DR イ. FMEA ウ. FTA エ. 源流段階
 オ. 検査段階 カ. 力量 キ. 情報 ク. 製品企画
 ケ. 商品企画 コ. 試作設計

正解 (1) エ (2) カ (3) ア (4) ケ (5) ク (6) コ

【問2】 品質保証に関する次の文章において、内に入る最も適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。

QC工程図は、とも呼ばれ、方向に工程名、作業内容、作業標準書、管理項目等の情報が記載され、方向に製品の加工、調整、検査等のプロセスを記載したものである。製品の設計段階で定めた仕様が段階で実現できることが狙いの一つであり、現場の管理方法を示す指示文書としての役割も果たす。管理方法についてはできるだけ的に記載する。

〈選択肢〉

- ア. QFD イ. QC工程表 ウ. QAネットワーク
 エ. 縦 オ. 横 カ. 企画
 キ. 生産 ク. 抽象 ケ. 具体

正解 (1) イ (2) オ (3) エ (4) キ (5) ケ

【問3】 品質保証に関する次の文章において、内に入る最も適切なものを下の選択肢からひとつ選べ。

①品質管理を行うために、ヒストグラムを用いられることが多い。ヒストグラムを作成するにあたり、各々の寸法等のと、を示す標準偏差を算出する。また、上限と下限のを記入することで、工程能力等を視覚的に把握することができる。

〈選択肢〉

- ア. 中央値 イ. 平方和 ウ. 平均値 エ. ばらつき
 オ. 度数 カ. 管理限界線 キ. OC曲線

正解 ①(1) ウ (2) エ (3) カ

②多数のデータを要因によっていくつかのグループに分けることをという。これはにおいて8つめの道具と呼ばれることも多い。これにより、例えば、是正措置や改善措置の前後のデータを比較し、各措置の性を判断することができる。

生産した製品に何か不具合が生じた場合に、追跡調査ができる状態にしてお

$$\text{価値(Value)} = \frac{\text{機能(Function)}}{\text{コスト(Cost)}}$$

価値(Value)が向上するパターンは4つあります(下表参照)。

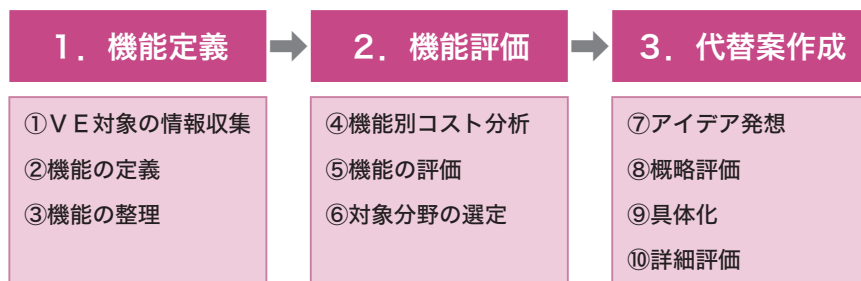
図表17.3 価値向上の4パターン

パターン	機能向上	原価低減	拡大成長	革新製品
機能 (Function)	↑	→	↑↑	↑
コスト (Cost)	→	↓	↑	↓

〈凡例〉↑：上昇、→：現状維持、↓：減少

また、価値の向上は以下の手順で進められます。「1. 機能定義→2. 機能評価→3. 代替案作成」の手順を、**VE基本3ステップ**といいます。1. で機能を定義し、2. でその機能のコストと価値を評価し、3. で代替案を作成・具体化し、そのコストや機能を評価します。①VE対象の情報収集～⑩詳細評価を**VE詳細10ステップ**といいます。

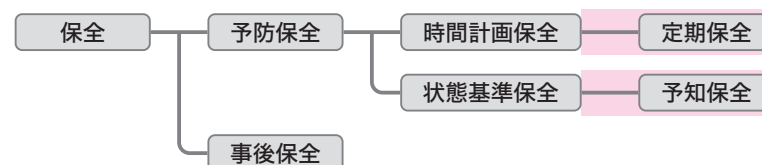
図表17.4 価値向上の手順



I Eは作業のムダ排除、VEは製品のコストダウン等を行うことができ、QCとともに、日本のものづくりを支えてきた管理技術といえます。

3 設備管理、資材管理、生産における物流・量管理

図表17.5 保全活動の体系図



設備管理とは、企業が所有する設備のライフサイクル管理(計画・設計・製作・保全・更新等)のことです。

保全においては、**維持活動**と**改善活動**に大きく区分されます(下表参照)。また、予防保全は時間計画保全と状態基準保全に分けられ、さらに、時間計画保全は**定期保全**などに、状態基準保全は**予知保全**などに分けられます。

図表17.6 設備管理の維持活動と改善活動

	種 類	概 要
維持活動	予防保全	故障に至る前に設備寿命を推定して、故障を未然に防止する保全活動。
	定期保全	従来故障記録等を基に周期を定め、周期ごとに行う、時間軸を基準とした保全活動。
	予知保全	設備の劣化傾向を診断管理し、故障に至る前の最適な時期に最善の対策を行う保全活動。
	事後保全	設備に故障が発生した時点で補修する保全活動。
改善活動	改良保全	故障の発生確率の低減、もしくは性能向上を図る保全活動。
	保全予防	過去の保全実績などを踏まえ、計画・設計段階から故障の予知・予測を行い、故障を排除する対策を行う保全活動。

【問3】 統計的方法の基礎

確率分布に関する次の文章において、 $\square$ 内に入るもっとも適切なものを下のそれぞれの選択肢からひとつ選び、その記号を解答欄にマークせよ。ただし、各選択肢を複数回用いてもよい。

①正規分布は、その分布の $\square(1)$ と $\square(2)$ で決まることから、 $N(\square(1), \square(2)^2)$ で表される。

正規分布の確率を計算するために、まず得られたデータを $\square(3)$ 化し、 $\square(3)$ 正規分布 $N(\square(4), \square(5)^2)$ とする。 $\square(3)$ 化とは、確率変数 x から $\square(6)$ を引いて、 $\square(7)$ で割ることである。

【(1)～(7)の選択肢】

ア. 平均値 $\bar{x}$ イ. 中央値 $\tilde{x}$ ウ. 平方和 S エ. 標準偏差 σ
オ. 分散 V カ. 標準 キ. 単純 ク. 0 ケ. 1
コ. 2 サ. 10 シ. 母集団 ス. 母平均 μ

②2つの確率変数 X 、 Y (X 、 Y は互いに無相関)の期待値を $E(X)$ 、 $E(Y)$ とし、 a 、 b を定数とすると、

$$E(X + aY) = \square(8)$$

$$E(aX + Y + b) = \square(9)$$

が成立する。

また、 $E(X) = \mu$ とし、 X の分散を $V(X)$ とすると、

$$V(X) = E\{\square(10)\} = \square(11) \text{ と展開される。}$$

さらに、

$$V(X + aY) = \square(12)$$

$$V(aX + Y + b) = \square(13)$$

が成立する。

【(8)～(13)の選択肢】

ア. $aE(Y)$ イ. $E(X)$ ウ. $E(X) + aE(Y)$
エ. $aE(X) + E(Y)$ オ. $aE(X) + E(Y) + b$
カ. $X + \mu$ キ. $X - \mu$ ク. $E(X^2) + \mu^2$
ケ. $E(X^2) - \mu^2$ コ. $E(X^2)$ サ. $V(X) + aV(Y)$
シ. $V(X) + a^2V(Y)$ ス. $aV(X) + V(Y) + b$
セ. $a^2V(X) + V(Y)$ ソ. $a^2V(X) + V(Y) + b$

【問4】 計量値データに基づく検定と推定

検定に関する次の文章において、 $\square$ 内に入るもっとも適切なものを下のそれぞれの選択肢からひとつ選び、その記号を解答欄にマークせよ。ただし、各選択肢を複数回用いることはない。なお、解答にあたって必要であれば巻末の付表を用いよ。

あるプレキャストコンクリート製品Aを製造している工場がある。製品Aの圧縮強度の従来の母平均は $\mu_0 = 25$ (kN/m²)である。最近、新たな材料を用いて製造を行い、強度測定を行ったところ、サンプルサイズ $n = 20$ において、平均値 $\bar{x} = 29$ 、標準偏差 $s = 10$ であった。新しい材料を用いて得られた圧縮強度の母平均が従来の母平均 $\mu_0 = 25$ を上回っているかどうか検定を行うことになった。

手順1：仮説を立てる。

一つ目の仮説は $\square(1)$ といい、 $H_0: \mu \square(2) \mu_0$ ($\mu_0 = 25$)

二つ目の仮説は $\square(3)$ といい、 $H_1: \mu \square(4) \mu_0$

とする。

【(1)～(4)の選択肢】

ア. 対立仮説 イ. 帰無仮説 ウ. $<$ エ. $>$ オ. $=$ カ. $\neq$

手順2：有意水準の決定

有意水準 $\alpha = 0.05$ とする。 H_0 が正しくないのに正しいと判断してしまう誤りを $\square(5)$ または $\square(6)$ という。一方、 H_0 が正しいのに正しくないと判断してしまう誤りを $\square(7)$ または $\square(8)$ という。

【(5)～(8)の選択肢】

ア. 第1種の誤り イ. 第2種の誤り ウ. ぼんやりものの誤り
エ. あわてものの誤り オ. うっかりものの誤り

手順3：検定統計量の計算

検定統計量を求める計算式は $t_0 = \square(9)$ である。これを用いて計算すると、 $t_0 = \square(10)$ となる。

【問7】 実験計画法

実験計画法に関する次の文章において、内に入るもっとも適切なものを下のそれぞれの選択肢からひとつ選び、その記号を解答欄にマークせよ。ただし、各選択肢を複数回用いることはない。なお、解答にあたって必要であれば巻末の付表を用いよ。

製品Xの品質特性の調査のため、品質に影響すると考えられる因子Aについて調べることになった。因子Aを3水準設定し、繰り返し2回で計6回の実験をランダムに行ったところ、下表の結果を得た。

表

因子A	A_1	A_2	A_3
データ	5.5	4.9	7.6
	5.7	4.5	6.9
合計	11.2	9.4	14.5
合計の2乗	125.44	88.36	210.25
個々のデータの2乗和	62.74	44.26	105.37

①得られたデータを用いて、分散分析表を作成すると下表のとおりとなる。

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
因子A				
誤差e				
計	7.04	5		

【(1)～(7)の選択肢】

ア. 0.12 イ. 0.35 ウ. 3.35 エ. 6.69 オ. 29.09
カ. 1 キ. 2 ク. 3 ケ. 4

②分散分析表およびF分布表より、品質は。また、データの数値が大きいほど望ましいとすると、もっとも望ましい数値はのときである。

【(8)～(9)の選択肢】

ア. 有意でない イ. 有意である ウ. A_1 エ. A_2 オ. A_3

【問8】 単回帰分析

単回帰分析に関する次の文章において、内に入るもっとも適切なものを下のそれぞれの選択肢からひとつ選び、その記号を解答欄にマークせよ。ただし、各選択肢を複数回用いてもよい。

ある工程の要因 x と品質特性 y に関する対のあるデータを10組観測した結果、次の統計量の値を得た。

x の平均値： $\bar{x}=6.4$ 、 y の平均値： $\bar{y}=8.4$ 、 x の偏差平方和： $S_{xx}=66.21$ 、 y の偏差平方和： $S_{yy}=21.43$ 、 x と y の偏差積和： $S_{xy}=34.56$

- ①要因 x と品質特性 y の相関係数 r は、となる。
 ② x を説明変数とし、 y を目的変数として回帰式($y=a+bx$)を推定すると、回帰係数 $b=\text{input type="text"/>$ となる。
 ③②の推定された回帰式について分散分析表を作成すると下表のとおりとなる。

要因	平方和S	自由度 ϕ	平均平方V	分散比 F_0
回帰				
残差				
計	21.43	9		

【(1)～(9)の選択肢】

ア. 0.42 イ. 0.52 ウ. 0.92 エ. 3.39 オ. 18.04
カ. 42.95 キ. 1 ク. 2 ケ. 7 コ. 8

F表より、 $F(\phi_R, \phi_e; 0.05)=\text{input type="text"}$ なので、回帰は。

【(10)～(11)の選択肢】

ア. 有意でない イ. 有意である ウ. 4.74 エ. 5.32

④マトリックス図法は、問題としている事象の中から、**対となる要素**を見つけ出して、**行と列**に配置する手法である。あてはまるのは**(ア)(ク)**。

【問3】(統計的方法の基礎)

【正解】

- (1) **ス** (2) **エ** (3) **カ** (4) **ク** (5) **ケ**
 (6) **ス** (7) **エ** (8) **ウ** (9) **オ** (10) **キ**
 (11) **ケ** (12) **シ** (13) **セ**

【解説】

①正規分布とは、横軸に確率変数、縦軸に確率度数をとるときに、平均値を中心に左右対称な釣鐘状になる分布のことで、**ス、母平均 μ** とばらつき(**エ、標準偏差**)で分布の形状が定まる。確率の計算をするために、データの**カ、標準化**(平均値=**ク、0**、標準偏差=**ケ、1**)²を行う。

②期待値と分散の加法性に関する問題である。

2つの確率変数 X 、 Y の期待値を $E(X)$ 、 $E(Y)$ とし、 a 、 b を定数とすると、

$$E(X + aY) = \text{ウ、} E(X) + aE(Y)、$$

$$E(aX + Y + b) = \text{オ、} aE(X) + E(Y) + b$$

が成立する。

$$V(X) = E\{(\text{キ、} X - \mu)^2\} \text{において、}(X - \mu)^2 \text{を展開する。}$$

$$(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2 \text{となる。}$$

$$V(X) = E\{(X - \mu)^2\} = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \quad \text{※} \mu^2 \text{は定数}$$

ここで、 $E(X) = \mu$ であることから、 $E(X)$ を μ に置き換えると、

$$E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \text{ケ、} E(X^2) - \mu^2$$

となる。さらに、

$$V(X + aY) = \text{シ、} V(X) + a^2 V(Y)、$$

$$V(aX + Y + b) = \text{セ、} a^2 V(X) + V(Y)$$

が成立する。

【問4】(計量値データに基づく検定と推定)

【正解】

- (1) **イ** (2) **オ** (3) **ア** (4) **エ** (5) **イ**
 (6) **ウ** (7) **ア** (8) **エ** (9) **ア** (10) **ク**
 (11) **イ** (12) **カ** (13) **キ** (14) **ケ**

※(5)(6)、(7)(8)はそれぞれ逆でも可。

【解説】

イ、帰無仮説(H_0)とは、改善の前後で有意な**変化はない**という仮説である。つまり、改善の前後で平均値は変わらないということで、 $\mu \text{オ、} = \mu_0$ となる。

ア、対立仮説(H_1)とは、改善の前後で有意な**変化がある**という仮説である。この場合、問題文に「母平均が従来の母平均を上回っているかどうか」とあるので、 $\mu \text{エ、} > \mu_0$ となる。

H_0 が正しくないのに正しいと判断してしまう誤りを**イ、第2種の誤り**または**ウ、ぼんやりものの誤り**という。 H_0 が正しいのに正しくないと判断してしまう誤りを**ア、第1種の誤り**または**エ、あわてものの誤り**という。

手順3において、検定統計量を求める計算式については記憶しておく必要がある。

$$t_0 = \text{ア、} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{29.0 - 25.0}{\sqrt{10^2/20}} = \frac{4.00}{\sqrt{5}} \doteq \text{ク、} 1.79 \quad \text{※} s^2 = V$$

手順4において、巻末の附表2(t 表)より、 $\phi = 20 - 1 = 19$ 、 $P = 0.10$ (有意水準5%だが、片側検定のため、0.10となる)の交点にある数値(**イ、1.729**)を得る。 $t_0 \text{カ、} > t(\phi, P)$ となり、 H_0 は**キ、棄却される**。よって、新しい材料により圧縮強度の母平均は従来に比べて**ケ、上回っている**といえる。

【問5】(計数値データに基づく検定と推定)

【正解】

- (1) **イ** (2) **エ** (3) **ケ** (4) **キ** (5) **ウ**
 (6) **オ** (7) **イ** (8) **エ** (9) **コ**

【解説】

(1)について、帰無仮説と対立仮説の定義を理解しておくことが重要。